CHAPITRE XI

Dérivation et intégration sur un segment des fonctions numériques (MPSI)

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I DÉRIVABILITÉ

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de** f **en** a.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Remarque : Interprétation géométrique

Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \to a$. D'où l'équation de la tangente en a : y=f'(a)(x-a)+f(a).

Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \infty$, f n'est pas dérivable en a, mais il y a une tangente verticale.

Propriété : DL_1

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$$

où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse.

b Dérivabilité à gauche, à droite

Définition

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Propriété

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

c Opérations algébriques

Propriété

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f+g$ dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) $f \times g$ dérivable en a et

$$(f\times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) λf dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iv) Si g ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Remarque

Plus généralement, si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en a, $f_1 \times \dots \times f_n$ l'est aussi et

$$(f_1 \times \dots \times f_n)'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_1(a) \dots, f_{k-1}(a) f'_k(a) f_{k+1}(a) \cdots f_n(a).$$

Propriété

Soient I, J sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).$$

Remarque

Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle, composée de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

d Dérivée d'une réciproque

Propriété

Si $f: I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarques

R 1 – Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.

R 2 – Dans tous les cas, la tangente en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y = x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à $\mathscr{C}_f$.

R 3 – Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

II Dérivées successives et classe d'une fonction

1 Définition

Définition

Soit $f: I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^{e} tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** I lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

Remarque

On peut être k fois dérivable sans être de classe $\mathscr{C}^k$.
Par exemple $f: x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable en 0 sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.

Propriété

Si $n \geqslant 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$).

Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.

2 Opérations

Propriété

Soient $f, g: I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *$f+g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *λf est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***

$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

(v) *Si $h: J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur J, $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Remarque

Le formule de Faa di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

Exercice : CCINP 3

Propriété : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, ch, sh, th, Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

Définition : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

$f: I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque

- f est bijective,
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Remarque

Un $\mathscr{C}^0$-difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété : Caractérisation (HP)

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.
Alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Remarque

Comme f' est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et f est strictement monotone, donc injective automatiquement.

III APPLICATIONS

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition : Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\ f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\ f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Remarque

Ainsi, f admet un minimum (respectivement maximum) local en a si et seulement si

$$\exists \eta > 0,\ \ \forall x \in I,\ \ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(x) \leqslant f(a)$). si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \ \forall h \in \mathbb{R},\ \ a+h \in I \text{ et } |h| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow f(a+h) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(a+h) \leqslant f(a)$).

Définition : point critique

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \mathring{I}$

H2 *f est dérivable en a*

H3 *f admet un extremum local en a*

Alors a est un pont critique de f : $f'(a) = 0$.
La réciproque est fausse.

Remarque

Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.

2 Théorème de Rolle

Théorème : Théorème de Rolle

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a,b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a,b[$*

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[,\ \ f'(c) = 0$.

Remarques

R 1 – La conclusion s'écrit aussi $\exists t \in]0,1[,\ \ f'(a+th)) = 0$ où $h = b-a$.

R 2 – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $\mathrm{M}(t_0) = \mathrm{M}(t_1)$ alors il existe un instant $t \in]t_0, t_1[$ tel que $v_{\mathrm{M}}(t) = 0$.

R 3 – ⚠ : Faux pour des fonctions qui ne sont pas à valeurs réelles !

3 Théorème des accroissements finis

Théorème : Théorème des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a,b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a,b[$*

Alors $\exists c \in]a,b[,\ \ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ie $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

Remarques

R 1 – Le résultat s'écrit encore $\exists t \in]0,1[,\ \ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+t(b-a)) = 0$ ie $f(a+h) = f(a) + hf'(a+th)$ où $h = b-a$.

R 2 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

4 Inégalité des accroissements finis

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a,b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a,b[$*

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in]a,b[,\ \ m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Remarque

Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, comme $a < b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre a et b et retrouver le résultat.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathring{I},\ |f'(x)| \leqslant k$

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Remarques

R1 – En particulier, si f est dérivable sur $\mathring{I}$, f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur $\mathring{I}$.

R2 – Si f est classe $\mathscr{C}^1$, on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leqslant k$ entre x et y (attention à l'ordre des bornes...)

5 Variation des fonctions dérivables

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$.

(i) f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\mathring{I}$.

(ii) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.

(iii) f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$ et $\left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ ne continent aucun intervalle d'intérieur non vide ie f' ne s'annule qu'en des points isolés.

Remarque

⚠ Si f est définie sur D réunion d'intervalles, $f' = 0$ dit que f est constante sur chaque intervalle, $f' \geqslant 0$ dit que f est croissante sur chaque intervalle...

LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE !

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 *f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

H2 *f est continue en a*

H3 $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Donc

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.*

Remarques

R1 – Si f' n'a pas de limite en a, on ne peut pas conclure.

Exemples

E1 – $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

E2 – $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

R2 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f : x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R3 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement $\mathscr{C}^1$. Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

Exercice : CCINP 4

Théorème

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a. Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

7 Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\left\{\int_{[a,b]}\varphi\ ;\ \varphi\in\mathscr{E}([a,b]),\varphi\leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_{[a,b]}\psi\ ;\ \psi\in\mathscr{E}([a,b]),\psi\geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

Définition

Soit $f\in\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \varphi\leqslant f}} \int_{[a,b]}\varphi = \inf_{\substack{\psi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \psi\geqslant f}} \int_{[a,b]}\psi.$$

Soit $f\in\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f\in\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\mathfrak{Im}\, f\in\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]}\mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i}\int_{[a,b]}\mathfrak{Im}\, f$$

Notation

Pour $f\in\mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$ et $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriétés

Si I intervalle, $a,b\in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f\end{array}\right.$ *est linéaire.*

(ii) *Si $a\leqslant b$, $f\leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f\leqslant\int_a^b g$.*
Si $b\leqslant a$, $f\leqslant g\Longrightarrow \int_a^b f\geqslant\int_a^b g$.

(iii) ⚠ *En général, si $a,b\in I$ et $f\in\mathscr{C}_m(I)$,*

$$\left|\int_a^b f\right|\leqslant\left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) *Si $a,b,c\in I$ et $f\in\mathscr{C}_m(I)$, $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Propriété : Positivité améliorée

*Si f est **continue** sur $\overleftrightarrow{[a,b]}$ et **de signe constant**,*

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f\equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $f,g\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\leqslant\int_a^b f^2\int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

8 Sommes de Riemann

Définition

Soit $f\in\mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\xi_k\in[a_k,a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f,\sigma,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(\xi_k)$$

Théorème

Soit $f\in\mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) *$h(\sigma)$ désignant le pas de σ,*

$$S(f,\sigma,\xi)\xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{}\int_a^b f.$$

(ii) *Si, de plus, f est K-lipschitzienne,*

$$\left|S(f,\sigma,\xi)-\int_a^b f\right|\leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

Corollaire

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a<b$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f.$$

En particulier, si $a=0$ et $b=1$, $f\in\mathscr{C}_m([0,1])$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f.$$

Remarque

À cause du $\frac{1}{n}$, ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 25}^{n-1 \text{ ou } n-2 \text{ ou } n+12} f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f.$$

Exemples

E 1 – Limite de $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j}$. Retrouver la nature de la série harmonique.

E 2 – Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)\mathrm{d}t$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

9 Intégrale et primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Propriété

*Soit $f : I\to\mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*
Alors on a $C\in\mathbb{K}$ tel que $\forall x\in I,\ \ F(x)=G(x)+C$.

Théorème : fondamental de l'Analyse

Si f est continue sur un intervalle I et $a\in I$, $F : x\mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a,b\in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$$

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

(iv) ***Inégalité des accroissements finis*** *: Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Propriété

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u,v : I\to J$ dérivables, $f : J\to\mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \begin{array}{|ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$ est dérivable sur I et

$$\forall x\in I,\ \ \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exercice : CCINP 56

Propriété

Si u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

$$\forall a,b\in I,\ \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple

Équivalent de $f(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t\ln t\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Propriété

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha,\beta]\to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

10 Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)

Méthode : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

a Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u'\times v'(u)$ qui s'intègre en $v\circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

b L'intégration par parties

Fonction dont la dérivée est plus simple... ...comme par exemple les fonctions $\ln, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arctan}$, etc.

Exemple

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Abaissement du degré, formule de récurrence

Exemple

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

c Le changement de variable

On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi'\times f\circ\varphi$.

On veut calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x=\varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t=\varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

d Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan.

e Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t=\cos x$ si q est impair et $t=\sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2+\sin^2=1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

Règles de Bioche

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t=\cos x$;
- $x \mapsto \pi-x$, on pose $t=\sin x$;
- $x \mapsto \pi+x$, on pose $t=\tan x$;
- Sinon on pose $t=\tan\frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$!!

Exemples

E 1 – $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\,\mathrm{d}t.$

E 2 – $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$

f Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch},\mathrm{sh},\mathrm{th}$ et $\exp$, on peut poser $t=\mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\,x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\,x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch},\mathrm{sh},\mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch},\mathrm{sh},\mathrm{th}$ par $\cos,\sin,\tan$ respectivement.

g Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a\neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2\pm 1}$ puis poser $t=\alpha x+\beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t=\mathrm{sh}\,u$ ($\mathrm{sh}^2+1=\mathrm{ch}^2$) ou $t=\tan u$ ($1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t=\pm\mathrm{ch}\,u$ suivant le signe de t. ($\mathrm{ch}^2-1=\mathrm{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t=\sin u$ ou $t=\cos u$ ($1-\cos^2=\sin^2$ et $1-\sin^2=\cos^2$.)

Exemple

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

IV FORMULES DE TAYLOR

Définition

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n=f-T_n$ (tel que $f=T_n+R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n\geqslant d+1$, $R_n\equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

1 Taylor reste intégrale

Théorème

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I)$, $a\in I$, alors pour tout $x\in I$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

À connaître **PARFAITEMENT**.

Pour s'en rappeler : tester pour $n=0$ et plus de a sous l'intégrale.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Remarque

Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $p=0$?

Corollaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

3 Formule de Taylor-Young

Propriété : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un DL$_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n (x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un DL$_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boldsymbol{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Remarque

⚠ On peut aussi dériver un DL terme à terme **à condition de savoir que f' admet un DL.**

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$, $a \in I$, alors f admet un DL$_n$ en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + o\left(h^n\right)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL$_n$ en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

Remarque

L'hypothèse du programme officiel est f de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a.