

CHAPITRE

Réduction

Extrait du programme officiel :

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Matrices semblables, interprétation géométrique.

Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.

En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F .

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.

\Leftrightarrow SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n .

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v .

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.

Deux matrices semblables ont même spectre.

Si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{K}' et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans \mathbb{K} est contenu dans le spectre de M dans \mathbb{K}' .

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations χ_u, χ_A .

Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.

La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ .

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E .

Cas des projecteurs, des symétries.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé est diagonalisable.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

Traduction matricielle.



CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<p>Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.</p>	Traduction matricielle.
e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
<p>Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.</p> <p>Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.</p> <p>Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.</p>	<p>Interprétation géométrique.</p> <p>La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.</p> <p>Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. $\Leftrightarrow I$: recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.</p>
f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
<p>Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.</p> <p>Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.</p> <p>L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.</p>	

TABLE DES MATIÈRES

RÉDUCTION

I	Sous-espaces stables	3
1	Point de vue géométrique	3
2	Point de vue matriciel	3
II	Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée	4
1	Cas d'un endomorphisme	4
2	Cas d'une matrice	6
3	Polynôme caractéristique	7
4	Multiplicité des valeurs propres	9
5	Cas particulier des matrices réelles	10
III	Diagonalisation	10
1	Diagonalisabilité des endomorphismes	10
2	Matrices carrées diagonalisables	11
3	Applications de la diagonalisation	17
a	Calculs de puissances	17
b	Commutant d'une matrice	18
c	Racines carrées d'une matrice	19
d	Suites récurrentes	20
IV	Trigonalisation	20
1	Définition	20
2	Mise en pratique en dimension 2 ou 3	21
V	Endomorphismes et matrices nilpotentes	22
1	Définition	22
2	Propriétés	22

Dans tout le chapitre, $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel où \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} .

I SOUS-ESPACES STABLES

1 Point de vue géométrique

Définition

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E , F est dit stable par u lorsque $u(F) \subset F$ c'est-à-dire $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Lorsque c'est le cas, $u_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$, appelé **endomorphisme induit par u sur F** est bien défini.

Exemple

$\{0_E\}$ et E sont stables par u .

Remarque

$u_F \neq u|_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$.

Propriété

Si F est de dimension finie $p > 0$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , alors F est stable par u si et seulement si $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_j) \in F$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la linéarité. □

Propriété

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, l'image et le noyau de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration

Vu en TD. □

2 Point de vue matriciel

Soit M écrite par blocs $M = \begin{pmatrix} \overset{F}{\xrightarrow{A}} & \overset{G}{\xrightarrow{B}} \\ \xrightarrow{p} & \xrightarrow{q} \\ \xrightarrow{C} & \xrightarrow{D} \\ \xrightarrow{q} & \xrightarrow{p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est représenté par M dans une base \mathcal{B} , alors on peut séparer \mathcal{B} de taille $p + q$ en deux sous-familles :

- les p premiers vecteurs engendrant un sous-espace F de E
- les q derniers vecteurs engendrant un sous-espace G .

Alors F et G sont supplémentaires de E ($F \oplus G = E$).

Alors, si $x \in E$, x_F et x_G ses composantes sur F et G (donc $x = x_F + x_G$), x est représenté dans \mathcal{B} par $X = \begin{pmatrix} X_F \\ X_G \end{pmatrix}$ où X_F

et X_G représentent x_F et x_G . Alors $u(x)$ est représenté dans \mathcal{B} par

$$MX = \begin{pmatrix} AX_F + BX_G \\ CX_F + DX_G \end{pmatrix}$$

représentant respectivement les composantes sur F et G de $u(x)$.

Cela se généralise à un nombre quelconque de sous-espaces.



Exercice

Montrer que toute projection peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $E = F \oplus G$ et \mathcal{B} une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

- F est stable par u si et seulement si $C = 0$.
- G est stable par u si et seulement si $B = 0$.

Démonstration

Si $C = 0$, l'image d'une base de F est dans F , donc c'est vrai pour tous les vecteurs de F par linéarité.
 Si F stable par u , alors la composante sur G des images des vecteurs de \mathcal{B} dans F est nulle donc $C = 0$. □

Exemple

Projections et symétries

Propriété : Généralisation

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et \mathcal{B} une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathcal{L}(E)$.

$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs ($A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$) si et seulement si chaque E_i est stable par u .

On peut alors considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur E_i dont la matrice dans la base \mathcal{B}_i (issue de \mathcal{B}) est A_i .

Remarque

On retrouve le résultat classique qu'alors u est uniquement déterminé par la donnée des u_i .

Exercice

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u .
2. Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \text{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u .
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.
4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, à coefficients entiers.

II ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME ET D'UNE MATRICE CAR-RÉE

1 Cas d'un endomorphisme

Remarque

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et D droite de E , on a $a \neq 0_E$ tel que $D = \text{Vect} a$. D stable par u ssi $u(a) \in D$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(a) = \lambda a$.

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On appelle **valeur propre** de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

- Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé son **spectre**, noté $\text{Sp } u$ ou $\text{Sp}_{\mathbb{K}} u$.

Remarques

- R1** – λ est valeur propre de u ssi $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$ ssi $u - \lambda \text{id}_E$ non injectif.
 En particulier, 0 est valeur propre de u ssi $\text{Ker } u \neq \{0_E\}$ ssi u non injectif.
- R2** – $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul.

Exemples

- E1** – $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u: f \mapsto f'$. $\text{Sp } u = \mathbb{R}$, $E_\lambda(u) = \{x \mapsto \alpha e^{\lambda x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- E2** – $E = \mathbb{R}[X]$ et $u: P \mapsto P'$. $\text{Sp } u = \{0\}$, $E_0(u) = \mathbb{R}_0[X]$.
- E3** – Homothétie $u = \lambda \text{id}_E$. $\text{Sp } u = \{\lambda\}$, $E_\lambda(u) = E$.
- E4** – Projection $p: \text{Sp } p \subset \{0, 1\}$, $E_1(p) = \text{Im } p$, $E_0(p) = \text{Ker } p$.

Propriété

Les droites stables par u sont les droites engendrées par un vecteur propre de u .

Propriété

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration

Si λ valeur propre de u et $x \in E_\lambda(u)$, alors $u(x) = \lambda x$ et $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda(u)$. □

Propriété

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.

Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe ie $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur le nombre p de sous-espace propres.

Il n'y a rien à faire pour un seul.

Soit $p \geq 1$ tel que ce soit vrai pour pour $p - 1$ sous-espaces propres, et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes.

Si $x_1 + \dots + x_p = 0_E$ (1) où pour tout i , $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, alors en composant par u on obtient $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E$ (2).

Alors (2) – $\lambda_p(1)$ donne $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p)x_1}_{\in E_{\lambda_1}(u)} + \dots + \underbrace{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1}}_{\in E_{\lambda_{p-1}}(u)} = 0_E$ donc par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$,

$$(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0_E.$$

Et comme les valeurs propres choisies sont deux à deux distinctes, pour tout $i \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$, $x_i = 0_E$.

Et enfin, avec (1), $x_p = 0_E$ ce qui établit la récurrence. □



Corollaire

Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants (forment une famille libre).

Démonstration

Avec les mêmes notations, si on a $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ et pour tout $i, x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, et si $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0_E$ alors vu la somme directe, pour tout $i, \alpha_i x_i = 0_E$. Mais comme ce sont des vecteurs propres, $x_i \neq 0_E$ et donc $\alpha_i = 0$. □

Exemple

$(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

Corollaire

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $|\text{Sp } u| \leq \dim E$.

Démonstration

Une famille libre de vecteurs de E possède toujours au plus $\dim E$ vecteurs. □

Exercice : CCINP 83

Soit u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$. Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

Solution :

1. Soit $\lambda \neq 0$.
Si λ valeur propre de $u \circ v$ alors $\exists x \in E \setminus \{0\} / (u \circ v)(x) = \lambda x$. (*)

Pour un tel x non nul, on a alors $v(u \circ v(x)) = \lambda v(x)$ c'est-à-dire $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$ (**).
Si $v(x) = 0$ alors, d'après (*), $\lambda x = 0$. Ce qui est impossible car $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.
Donc $v(x) \neq 0$.
Donc, d'après (**), $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre λ .
2. On trouve que $v \circ u = \text{Id}$ et $u \circ v : P \mapsto P(X) - P(1)$.
Ainsi $\text{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et $\text{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$.
On observe que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
On constate donc que le résultat de la question 1. est faux pour $\lambda = 0$.
3. Si E est de dimension finie, comme $\det(u \circ v) = \det u \det v = \det(v \circ u)$ alors :
 0 est valeur propre de $u \circ v \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0$ est valeur propre de $v \circ u$.
Remarque 1 : le résultat de la question 1. est vrai pour $\lambda = 0$ si et seulement si E est de dimension finie.
Remarque 2 : Si E est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

2 Cas d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **valeur propre** de A tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé son **spectre**, noté $\text{Sp } A$ ou $\text{Sp}_{\mathbb{K}} A$.

Remarques

- R1** – Les éléments propres d'une matrice sont ceux de l'application linéaire canoniquement associée (via la base canonique de \mathbb{K}^n).
- R2** – Si \mathbb{K} sous-corps de \mathbb{C} , $\text{Sp}_{\mathbb{K}} A \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}} A$ car des vecteurs propres dans \mathbb{K} sont en particulier des vecteurs propres dans \mathbb{C} .

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $A^2 = -I_2$. Les valeurs propres vérifient $\lambda^2 = -1$.

Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$.

Mais Avec le même argument, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset \{-i, i\}$.

Or $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x = iy : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre i , et $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x = -iy : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre $-i$ et donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{-i, i\}$.

Propriété

Si $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, \mathcal{B} est une base de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A , alors $\text{Sp } u = \text{Sp } A$.

3 Polynôme caractéristique

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp } u &\iff \exists x \neq 0_E, \quad u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \neq 0_E, \quad (u - \lambda \text{id}_E)(x) = 0_E \\ &\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff u - \lambda \text{id}_E \text{ non injective} \\ &\iff u - \lambda \text{id}_E \text{ non bijective} \end{aligned}$$

Propriété

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{id}_E \notin \mathcal{GL}(E)$ si et seulement si $\det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$.

Remarques

- R1** – En dimension infinie, $u - \lambda \text{id}_E \notin \mathcal{GL}(E) \not\Rightarrow \lambda$ valeur propre de u , car $u - \lambda \text{id}_E$ pourrait être injectif sans être bijectif.
- R2** – En particulier, $u \in \mathcal{GL}(E)$ si et seulement si $0 \notin \text{Sp } u$.

De la même manière,

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Remarque

En particulier, $u \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $0 \notin \text{Sp } u$.

Comme, pour $x \in \mathbb{K}$, $\det(xI_n - A) = (-1)^n \det(A - xI_n)$ est polynomial en x , on peut définir :

Définition : Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

- On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.
- On appelle **polynôme caractéristique** de u le polynôme $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$.



Exemple

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$.

Propriété

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Exercice

Montrer que A et A^T ont même polynôme caractéristique.

Propriété

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Les racines de χ_A (respectivement χ_u) sont exactement les valeurs propres de A (respectivement u).
- Si \mathcal{B} base de E tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_A$.
- χ_A est de degré n unitaire. Plus précisément,

$$\chi_A = X^n - (\text{tr } A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

χ_u est de degré n unitaire. Plus précisément,

$$\chi_u = X^n - (\text{tr } u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u.$$

Remarques

- R1 – Les coefficients se retrouvent facilement en considérant le cas d'une matrice triangulaire et en utilisant les relations coefficients-racines.
- R2 – En dimension 2, on a immédiatement $\det A = X^2 - \text{tr } AA + \det A$.

Démonstration

- Déjà vu.
- Si \mathcal{B} , $x \in \mathbb{K}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x \text{id}_E - u) = xI_n - A$.
-

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & & & (-a_{1,j}) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (-a_{i,j}) & & & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n},$$

où les $m_{i,j}$ sont des polynômes de degré 0 (s'il vaut $-a_{i,j}$) ou 1 (s'il vaut $X - a_{i,i}$).

On a donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. On remarque que si $\sigma \neq \text{id}$, on a au moins deux termes constants dans le produit (car σ injective), donc

$$\chi_A = (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n}) + Q$$

où $\deg Q \leq n - 2$. Soit encore

$$\chi_A = X^n - \sum_{i=1}^n a_{i,i} X^{n-1} + Q_1 = X^n - (\text{tr } A)X^{n-1} + Q_1$$

où $\deg Q_1 \leq n - 2$.

Donc χ_A est de degré n , unitaire et de coefficient en X^{n-1} égal à $-\text{tr } A$.

Le coefficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

- Il suffit de considérer une matrice dans une base de E et utiliser le point précédent. □

Propriété

Le polynôme caractéristique et le spectre sont des invariants de similitude.

Démonstration

Des matrices semblables représentent un même endomorphisme. □

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u , u_F endomorphisme induit par u sur F .
Alors χ_{u_F} divise χ_u .

Démonstration

Soit \mathcal{B}_F base de F complétée en \mathcal{B} base de E . Alors la matrice de u dans \mathcal{B} est de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$ où A est la matrice dans \mathcal{B}_F de u .

Alors $\chi_u = \chi_M = \begin{vmatrix} XI_p - A & -B \\ (0) & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = \chi_A \times \chi_C$ est divisible par $\chi_A = \chi_{u_F}$. □

Théorème : de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Exemple

Si $n = 2$, $A^2 = (\text{tr } A)A - (\det A)I_n$.

Démonstration

(Non exigible) Vue plus tard.

4 Multiplicité des valeurs propres

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition : Multiplicité d'une valeur propre

La **multiplicité** d'une valeur propre λ de u (respectivement A) est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Propriété

Le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicités est toujours au plus égal à n (dimension de E ou taille de la matrice).
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a toujours égalité.

Propriété

Si λ valeur propre de u (respectivement A) d'ordre m_λ , $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ (respectivement $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda$).

Démonstration

Soit $d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.

On a déjà comme λ valeur propre que $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit au vecteur nul et donc $d_\lambda \geq 1$.

De plus, comme $E_\lambda(u)$ est stable par u , si on note u_λ l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$, χ_{u_λ} divise χ_u .

Or $u_\lambda : \begin{matrix} E_\lambda(u) & \longrightarrow & E_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) = \lambda x \end{matrix}$ donc $u_\lambda \lambda \text{id}_E$ donc $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{d_\lambda}$.

Cela prouve finalement que $d_\lambda \leq m_\lambda$.

Pour la matrice, il suffit de passer par n'importe quel endomorphisme qu'elle représente. □

Corollaire

Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.



Propriété

Si χ_A est scindé, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités respectives m_1, \dots, m_p , alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i = \text{tr } A \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_i} = \det A.$$

On a un énoncé analogue pour u .

Démonstration

Ce sont les relations coefficients racines, avec $\chi_A = X^n - (\text{tr } A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$. □

Remarques

- R1 – Se retrouve facilement avec les matrices triangulaires.
- R2 – Ce n'est plus vrai si χ_A n'est pas scindé.

5 Cas particulier des matrices réelles

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note \bar{A} la matrice dans laquelle on conjugue tous les coefficients. On a facilement $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$ et $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ lorsque ces opérations sont bien définies.

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre complexe de A de multiplicité m .

- $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A de multiplicité m .
- Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de A associé à λ , \bar{X} est vecteur propre de A associé à $\bar{\lambda}$.
- Si $d = \dim E_\lambda(A)$, (e_1, \dots, e_p) une base de $E_\lambda(A)$, alors $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p)$ base de $E_{\bar{\lambda}}(A)$ de dimension d .

Démonstration

On sait (en utilisant la caractérisation de la multiplicité par les dérivées) si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\bar{\lambda}$ est racine de P du même ordre.

En appliquant cela au polynôme caractéristique de A et en remarque que $AX = \lambda X$ implique $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$, on peut conclure.

On a aussi facilement que la conjugaison ne change pas l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. □

Exercice

Si n est impair, il y a toujours au moins une valeur propre réelle.

III DIAGONALISATION

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Diagonalisabilité des endomorphismes

Définition : Diagonalisabilité d'un endomorphisme

u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exemple

Homothéties, projections, symétries, affinités.

Propriété : Caractérisation 1

u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Une telle base est dite **diagonalisante**.

Propriété : Caractérisation 2

u est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E
 ($E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } u} E_\lambda(u)$.)

Démonstration

Dans un sens on prend une base adaptée à la décomposition, dans l'autre on décompose tout $x \in E$ dans une base de vecteurs propres. □

Exemple

Projecteurs, symétries.

Propriété : Caractérisation 3

u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de sous-espaces stables sur lesquelles u induit une homothétie.

Propriété : Caractérisation 4

u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{Sp } u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.

Propriété : Caractérisation 5

u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp } u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.

Démonstration

\Rightarrow Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base diagonalisante, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes associées, d_1, \dots, d_p les dimensions des sous-espaces propres associés.

Alors, matrice dans \mathcal{B} étant diagonale $\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{d_i}$ et donc $m_{\lambda_i} = d_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$.

\Leftarrow Si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp } u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$, alors $\sum_{\lambda \in \text{Sp } u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ donc u est diagonalisable. □

Propriété : Condition suffisante 1

Si χ_u est scindé simple, alors u est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (ie de dimension 1).

Démonstration

Il y a $\dim E$ valeurs propres et comme chaque sous-espace est dimension au moins 1 et que la somme de leurs dimensions est majorée par celle de E , elles sont toutes égales à 1, la somme des dimensions vaut $\dim E$ et u est diagonalisable. □

Corollaire : Condition suffisante 2

Si u possède n valeurs propres distinctes en dimension n , alors u est diagonalisable.

Exercice : CCINP 72

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

2 Matrices carrées diagonalisables



Définition : Diagonalisabilité d'une matrice carrée

A est dite **diagonalisable** sur \mathbb{K} si son endomorphisme canoniquement associé l'est.

Vu la définition de la diagonalisabilité d'un endomorphisme, on en tire immédiatement :

Propriété : Caractérisation 6

A est **diagonalisable** sur \mathbb{K} si et seulement si elle est semblable sur \mathbb{K} à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ ie $D = P^{-1}AP$.

Remarque

P n'est pas unique alors que D l'est : elle va contenir les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités. Avec la définition, il s'agit de la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{K}^n vers une base diagonalisante de E pour u .

Propriété : Caractérisation 7

Si u est n'importe quel endomorphisme représenté par A , alors A est diagonalisable si et seulement si u l'est.

Démonstration

Supposons que u soit représenté par A dans une base \mathcal{B} de E .

On sait que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ ie $D = P^{-1}AP$ et que u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

On a donc bien A est diagonalisable si et seulement si u l'est.

De plus, P est la matrice de passage de \mathcal{B} dans laquelle A représente u à une base diagonalisante. □

Remarques

R1 – Ne pas dire qu'il y a une base dans laquelle A est diagonale !

R2 – En passant par exemple par l'endomorphisme canoniquement associé, les caractérisations vues pour les endomorphismes s'adaptent aux matrices :

A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres
 si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de A est égale à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
 si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{Sp } A} \dim E_{\lambda}(A) = n$
 si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp } A, m_{\lambda} = \dim E_{\lambda}(A)$
si χ_A est scindé simple (n valeurs propres distinctes).

R3 – Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à A , et si on a une base diagonalisante $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, elle est constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et pour tout $i, u(e'_i) = \lambda_i e'_i$.

P est la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B}' , donc ses colonnes contiennent directement les composantes des n -uplets e'_1, \dots, e'_n .

Dans la pratique, on travaille directement matriciellement, les colonnes correspondant (dans la base canonique) aux e'_i sont directement des vecteurs propres de A .

Exercice

Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?



Méthode : Diagonaliser une matrice diagonalisable A

1. Déterminer les valeurs propres, par exemple avec χ_A . (Parfois du bon sens (de l'observation) suffit. Essayer de sommer les colonnes, par exemple).
2. Chercher une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda}(A)$.
 Si on a calculé χ_A par une méthode du pivot de Gauss, on peut reprendre la forme échelonnée finale et évaluer en λ pour finir la résolution du système !

Savoir tirer rapidement des informations de la matrice $A - \lambda I_n$ en observant les colonnes !

3. Justifier alors que A est diagonalisable.
4. Déterminer une base de vecteurs propres : il suffit de concaténer des bases de chaque sous-espace propre vu qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
5. Calculer P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (qui sont directement les colonnes de P).
6. Poser D la matrice diagonale formée des valeurs propres associées à chaque vecteur propre de la base, dans le même ordre.
7. On a alors $A = PDP^{-1}$ (en appliquant une formule de changement de base à l'endomorphisme canoniquement associé à A .)

Exemple

Diagonalisation de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X-4 & 2 \\ X-5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2(X-4) \\ 0 & X-6 & (X-4)^2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2(X-4) \\ 0 & 0 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} = (X-2)(X-4)(X-6) \end{aligned}$$

Avec $L_1 \leftrightarrow L_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + (X-5)L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Donc $\text{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$: 3 valeurs propres distinctes en dimension 3 donc A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Puis, en appliquant un pivot de gauss similaire à celui du calcul du polynôme caractéristique (il suffit d'évaluer le dernier déterminant en la valeur propre),

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ donc $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Autre méthode : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: $C_2 + C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ qui est une droite donc $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Si on ne sait pas déjà que c'est une droite, on vérifie (C_1, C_2) libre donc le rang vaut 2 et le noyau est de dimension 1 par théorème du rang.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A) \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ donc $E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6(A) \iff \begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc $E_6(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de vecteurs propres et la formule de changement de base (appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à A entre la base canonique et $\mathcal{B}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ donne $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice : CCINP 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé :

$\chi_M(X) = \det(XI_3 - M)$.

Après calculs, on trouve, $\chi_M(X) = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

Premier cas : $ca - ba - bc < 0$

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.

Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$

Alors, 0 est la seule valeur propre de M .

Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$. Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.

On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.



Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$

Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

Exercice : CCINP 59

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

(a) sans utiliser de matrice de f ,

(b) en utilisant une matrice de f .

2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3. f est-il diagonalisable ?

Solution :

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}, \deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.

Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.

On en déduit que $\forall P \in E, \deg f(P) = \deg P$.

Donc $f(E) \subset E$. (**)

D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E .

(a) Déterminons $\text{Ker } f$.

Soit $P \in \text{Ker } f$.

$f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.

Or, d'après ce qui précède, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.

Donc $P = 0$.

On en déduit que $\text{Ker } f = \{0\}$.

Donc f est injectif.

Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

(b) Soit $e = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E . Soit A la matrice de f dans la base e .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.

Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.

D'après 1. : $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.

$P - P' = Q, P' - P'' = Q', \dots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.

Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).

Tout revient à se demander si A est diagonalisable.

Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A .

D'après 1.(b), on a $P_A(X) = (X - 1)^{n+1}$.

Donc 1 est l'unique valeur propre de A .

Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1} .

On aurait donc $A = I_{n+1}$.

Ce qui est manifestement faux car $f \neq \text{Id}$.

Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

Exercice : CCINP 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

- Déterminer le rang de A .
- Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé :

- Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.

Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$

Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.

Donc $\operatorname{rg} A = 3$.

Deuxième cas : $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \operatorname{rg} A = 2.$$

Troisième cas : $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \operatorname{rg} A \geq 2 \text{ car les deux premières colonnes de } A \text{ sont non colinéaires.}$$

Or $\det A = 0$ donc $\operatorname{rg} A \leq 2$.

On en déduit que $\operatorname{rg} A = 2$.

- Notons χ_A le polynôme caractéristique de A .

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1 + a & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

Donc, en développant par rapport à la première colonne,

$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1).$$

$$\text{Donc } \chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1).$$

Les racines de χ_A sont $a+1$, $-a$ et -1 .

$$a+1 = -a \iff a = -\frac{1}{2}.$$

$$a+1 = -1 \iff a = -2.$$

$$-a = -1 \iff a = 1.$$

Ce qui amène aux quatre cas suivants :

Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$

Alors A admet trois valeurs propres distinctes.

Donc A est diagonalisable.

Deuxième cas : $a = 1$

$$\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2.$$

Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(A + I_3) = 1$.

$$\text{Or } A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \operatorname{rg}(A + I_3) = 1.$$

Donc A est diagonalisable.

Troisième cas : $a = -2$

$$\text{Alors, } \chi_A = (X + 1)^2(X - 2).$$



$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes de $A + I_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\text{rg}(A + I_3) \geq 2$.

De plus, -1 est valeur propre de A , donc $\text{rg}(A + I_3) \leq 2$.

Ainsi, $\text{rg}(A + I_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.

Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a = -\frac{1}{2}$

$$\chi_A = (X - \frac{1}{2})^2(X + 1).$$

$$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de $A - \frac{1}{2}I_3$ sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) \geq 2$.

De plus, $\frac{1}{2}$ est valeur propre donc $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) \leq 2$.

Ainsi, $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.

Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A est non diagonalisable.

Exercice : CCINP 70

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question 1. les éléments propres de B .

Solution :

- $\chi_A(X) = (X^3 - 1)$ donc $\text{Sp}A = \{1, j, j^2\}$.
On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.
On pose $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$, $E_j(A) = \text{Ker}(A - jI_3)$ et $E_{j^2}(A) = \text{Ker}(A - j^2I_3)$.

Après résolution, on trouve $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_j(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right)$.

Et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{C}^3 , vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On pose $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, j^2, j)$, $e'_3 = (1, j, j^2)$ et $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
D'après 1., e' est une base de vecteurs propres pour f .

Soit P la matrice de passage de e à e' . On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

Alors, $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.

On en déduit que $B = aI_3 + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$.

C'est-à-dire, si on pose $Q = a + bX + cX^2$, alors $B = P \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(j) & 0 \\ 0 & 0 & Q(j^2) \end{pmatrix} P^{-1}$.

On en déduit que B est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de B sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

Premier cas : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

B possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

De plus, on peut affirmer que :

$$E_{Q(1)}(B) = E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{Q(j)}(B) = E_j(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{Q(j^2)}(B) = E_{j^2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right).$$

Deuxième cas : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.

Supposons par exemple que $Q(1) = Q(j)$ et $Q(j^2) \neq Q(1)$.

B possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.

De plus, on peut affirmer que :

$$E_{Q(1)}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{Q(j^2)}(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right).$$

Troisième cas : $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.

B possède une unique valeur propre : $Q(1)$.

De plus, on peut affirmer que $B = Q(1)I_3$ et $E_{Q(1)}(B) = \mathbb{C}^3$.

Exercice : Matrices compagnes

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne $(a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

3 Applications de la diagonalisation

a Calculs de puissances



Méthode

Si on diagonalise $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, valable dans \mathbb{Z} si A est inversible c'est-à-dire si 0 n'est pas valeur propre.



Exemple

Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout n , $X_n = A^n X_0$.

Or $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

D'où x_n, y_n, z_n exprimés en fonction de x_0, y_0, z_0 .

On peut même calculer le résultat sans calculer P^{-1} !

Si on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, $Y_{n+1} = DY_n$ donc $Y_n = D^n Y_0$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n(\lambda + \mu) + 2^n \nu \\ (-1)^{n+1} \lambda + 2^n \mu \\ (-1)^{n+1} \mu + 2^n \nu \end{pmatrix}$.

b

Commutant d'une matrice

Définition : Commutant d'une matrice carrée

Le **commutant** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

Propriété

C'est un sous-espace vectoriel et même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration

C'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$, et stable par produit. □



Méthode : Commutant d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M commute avec A si et seulement si N commute avec D .
C'est facile en passant par les endomorphismes !
- On détermine directement $\mathcal{C}(D)$ en traduisant $DN = ND$. (Rappel : il est facile de multiplier à gauche ou à droite par une matrice diagonale !)
- On en déduit $\mathcal{C}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1} .

Exemple

Toujours avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a, pour $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $DN = ND$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & 2c \\ -d & -e & 2f \\ -g & -h & 2i \end{pmatrix}$ si et seulement si $c = f = g = h = 0$ si et seulement

si N de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Alors $\mathcal{C}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}, a, b, c, d, i \in \mathbb{R} \right\}$. C'est un espace vectoriel de dimension 5.

Exercice : CCINP 73

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Solution :

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\text{Sp}A = \{-2, 3\}$.
Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :

$$E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_{-2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right).$$

2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$ND = DN \Leftrightarrow \begin{cases} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow N \text{ diagonale.}$$

$$\text{On a } A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP \text{ commute avec } D.$$

$$\text{C'est-à-dire, } AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Donc, l'espace des matrices commutant avec } A \text{ est } C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

C'est un plan vectoriel.

De plus, pour des raisons d'inclusion ($I_2 \in C(A)$ et $A \in C(A)$) et d'égalité des dimensions, $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.



Racines carrées d'une matrice

Définition

Si $M, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est une racine carrée de A lorsque $M^2 = A$. On note $\mathcal{R}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A .

Remarques

- R1** – $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{C}(A)$: si M est une racine de A , alors A est un polynôme en M donc commute avec M .
R2 – Cette fois, on n'a plus un sous-espace vectoriel en général.



Méthode : Racines carrées d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

Même principe que pour le commutant.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M racine carrée de A si et seulement si N racine carrée de D .
2. On détermine directement $\mathcal{R}(D)$ en traduisant $N \in \mathcal{C}(D)$ et $N^2 = D$.
3. On en déduit $\mathcal{R}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1} .

Exemple

Toujours avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, a, b, c, d, i \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ racine de } D \text{ ssi } \begin{pmatrix} a^2+bd & b(a+e) & 0 \\ d(a+e) & e^2+bd & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = D$$

Mais si on a $a+e \neq 0$, alors $b = d = 0$ et $a^2 = -1$ ce qui n'est pas possible sur \mathbb{R} .



Donc N racine de D si et seulement si $e = -a$, $a^2 + bd = -1$ et $j^2 = 2$.

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} s\sqrt{-1-bd} & b & 0 \\ d & -s\sqrt{-1-bd} & 0 \\ 0 & 0 & t\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}; b, d \in \mathbb{R}; bd \leq -1; s, t \in \{-1, 1\} \right\}.$$



Suites récurrentes



Méthode : Terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène $u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u_i$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$.
2. On se ramène à $X_{n+1} = AX_n$, ce qui donne pour tout n , $X_n = A^n X_0$.
3. On peut, en diagonalisant $A = PDP^{-1}$ (si possible), s'affranchir du calcul de P^{-1} puis de celui de A^n en posant $Y_n = P^{-1} X_n$, ce qui donne $X_n = PD^n Y_0$.
4. On en déduit l'expression de u_n en fonction de n .

Exemple

Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Remarque

Quel est le polynôme caractéristique pour l'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$?

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

On calcule $\chi_A = X^2 - aX - b$: équation/polynôme caractéristique.

IV TRIGONALISATION

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Définition

Définition : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ tel que $A = PTP^{-1}$.

Propriété

A est trigonalisable si et seulement si n'importe quel endomorphisme qu'elle représente l'est.

Remarques

- R1 – Être diagonalisable implique être trigonalisable. La réciproque est fautive !
- R2 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u . On parle de **drapeau** stable par u .
- R3 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire inférieure.

Propriété : Caractérisation

u (respectivement A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration

(\Rightarrow) (Matriciellement) Si A est trigonalisable, on a P inversible et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $A = PTP^{-1}$.

Alors $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ est scindé.

(\Leftarrow) (Géométriquement) **Méthode classique**

- Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
- Si $n \geq 2$ et χ_u est scindé, il y a au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé. On complète la famille libre (x) en une base $\mathcal{B} = (x, e_2, \dots, e_n)$ de E .

Dans cette base, la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Si $E_1 = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_2, \dots, e_n)$ de E_1 est A_1 , alors, par un déterminant triangulaire par bloc, $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A_1}$.

Donc χ_{A_1} est scindé. Il suffit donc de raisonner par récurrence : si on sait trigonaliser u_1 en dimension $n - 1 \geq 1$ pour n fixé, on a $P_1 \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ et T_1 triangulaire telle que $A_1 = P_1 T_1 P_1^{-1}$.

Alors $A = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & P_1 T_1 P_1^{-1} \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix} = I_n$ donc P inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix}$ et

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & T_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. □

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes et toutes les matrices sont trigonalisables.

Remarque

Si u (respectivement A) est trigonalisable, comme le polynôme caractéristique est scindé, on a automatiquement que si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de de multiplicités respectives m_1, \dots, m_p , alors $\sum_{i=1}^p m_i \lambda_i = \text{tr } u$ (ou $\text{tr } A$) et $\prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_i} = \det u$ (ou $\det A$). Cela saute d'ailleurs aux yeux avec la matrice triangulaire !

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

On peut toujours mettre en application la démonstration par récurrence constructive. Voici deux exemples particuliers.



Méthode : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ .
2. On complète en $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Exercice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).



Méthode : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre double λ et une valeur propre simple μ .

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ .
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Remarque

Il se peut aussi que A ait une valeur propre triple.

V ENDOMORPHISMES ET MATRICES NILPOTENTES

1 Définition

Définition : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

$u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $p \geq 1$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (respectivement $A^p = 0_n$).

Le plus petit $p \geq 1$ vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**.

Remarque

u est nilpotent si et seulement si n'importe quelle matrice qui le représente l'est.

Exemples

E1 – L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de dérivation est nilpotent d'indice $n + 1$.

E2 – $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice n .

E3 – Plus généralement, une matrice triangulaire stricte est nilpotente d'indice au plus n .

2 Propriétés

Propriété : Caractérisation

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $\text{Sp } u = \{0\}$.

Dans ce cas, $\chi_u = X^n$ où $n = \dim E$.

Idem avec des matrices.

Démonstration

Si u est nilpotent, sa seule valeur propre complexe est 0 (si λ est valeur propre, on a $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ et alors $u^p(x) = \lambda^p x = 0$ donc $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$) donc son polynôme caractéristique est X^n qui est scindé.

Si u est trigonalisable et n'a que 0 comme valeur propre, il est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte, donc il est nilpotent. □

Remarque

En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est presque jamais diagonalisable !

Propriété

L'indice de nilpotence est toujours majoré par $n = \dim E$.

Démonstration

Vu la propriété précédente, le polynôme caractéristique est X^n et c'est un polynôme annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Autre preuve possible : si p l'indice de nilpotence et $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$, alors on montre que $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est libre, donc $p \leq n$. \square