

CHAPITRE IX

Déterminant

1 Groupe symétrique

Définition : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E . On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.
 Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathfrak{S}_n appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.
 Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque

Attention! \mathfrak{S}_n n'est pas de cardinal n mais ...

Propriété

(\mathfrak{S}_n, \circ) est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geq 3$.

Définition : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui **ne sont pas** invariants par σ .

Propriété

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Exercice : Centre de \mathfrak{S}_n

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et (i, j) commutent, $\{i, j\}$ est stable par σ . La réciproque est-elle vraie?
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ le centre de \mathfrak{S}_n , partie de \mathfrak{S}_n des permutations commutant avec toutes les permutations de \mathfrak{S}_n est $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\text{id}_{\mathbb{N}_n}\}$. Étudier le cas où $n = 2$.

Définition : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i, j\}$.
On la note $\tau = (i, j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
 $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i, j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$.
On appelle **p -cycle** une permutation c de \mathfrak{S}_n qui permute circulairement p éléments i_1, i_2, \dots, i_p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2 ; c(i_2) = i_3 ; \cdots ; c(i_{p-1}) = i_p ; c(i_p) = i_1$$

p est la **longueur** du cycle c . On note $c = (i_1 i_2 \cdots i_p)$.

Exercice : Conjugaison de cycle

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Théorème

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.



Corollaire

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

Définition : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ .

On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1, 1\}$.

Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Théorème

Soit $n \geq 2$. L'application

$$\varepsilon : \begin{cases} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1, 1\}, \times) = (\mathbb{U}_2, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{cases}$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriétés

(i) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) Si c est un p -cycle, $\varepsilon(c) =$

(iii) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

2 Formes n -linéaires

Définition

Soit \mathbb{K} corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \rightarrow F$ est dite **n -linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

(Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n -linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n -linéaire**.

Propriété

$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si
- f est dite **antisymétrique** si et seulement si
- f est dite **alternée** si et seulement si

Propriétés : Caractérisations

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,$$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,$$



(iii) f est alternée si et seulement si

$$\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,$$

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarque

Le sens réciproque est vrai car \mathbb{K} n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème : fondamental

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = \dim E$, l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n -linéaires alternées sur E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1.

Remarque

Deux formes n -linéaires alternées sur E sont donc toujours proportionnelles.

3 Déterminant



Définitions

On fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Définition

On appelle **déterminant dans la base \mathcal{B}** l'unique forme n -linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
Si pour $1 \leq j \leq n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans \mathcal{B} , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) =$$

On note

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque

Par définition, le déterminant est n -linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E .

(i) **Formule de changement de base :**

(ii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) =$

(iii) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est libre/une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Propriété : Interprétation géométrique

- (i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 , alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} .
- (ii) Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

On montre que si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de \mathcal{B} . On en déduit la définition :

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ où \mathcal{B} est une base quelconque de E .

Propriétés

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- (i) $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E$,
 $\det_{\mathcal{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) =$
- (ii) $\det(\text{id}_E) = 1$.
- (iii) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
- (iv) $\triangleq \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda u) =$
- (v) $u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
- (vi) $\det : (\mathcal{GL}(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.
- (vii) Si $u \in \mathcal{GL}(E)$, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.

Remarque

\triangleq \det n'est pas linéaire : $\det(u + v) \neq \det u + \det v$ en général. Exemple $\pm \text{id}_E$ en dimension impaire.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

Remarque

Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

Propriétés

- (i) Si C_1, \dots, C_n sont les vecteurs colonnes de A et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^n , $\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.
- (ii) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par A dans une base de E , alors $\det A = \det u$.
- (iii) $\det I_n = 1$.
- (iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.
- (v) \triangleq Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- (vi) $\det A^T = \det A$.
- (vii) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.
- (viii) $\det : (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.
- (ix) Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
- (x) Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.



Remarque

⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : \det n'est pas linéaire.

b **Calculs**

Propriété

- (i) Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
- (ii) On ne change pas le déterminant avec les opérations

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

- (iii) En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.
- (iv) Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1 . Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.
- (v) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Définition : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A .
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) **Développement par rapport à L_i** : Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,
- (ii) **Développement par rapport à C_j** : Si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

Exercice : CCINP 63

Propriété : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

Propriété : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
 V(x_1, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Remarque

$V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

c **Formule de la comatrice****Propriété : Formule de la comatrice**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

Si, de plus, A est inversible, alors

Remarque

Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3 .

d **Application : Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel****Définition**

On dit qu'une base \mathcal{B} d'un \mathbb{R} -espace vectoriel a **même orientation** qu'une autre base \mathcal{B}' lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) > 0$.

Remarque

⚠ Cela n'a aucun sens dans \mathbb{C} !

Propriété

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition

Orienter un \mathbb{R} -espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation, sont dites **indirectes**.