TD : Suites de fonctions

1) (28)

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\sin(n^2 x\pi)}{n^2}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{indépendant de } x}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann $2>1$)

donc f_n bornée et par CSTGP, $\sum \|f_n\|_\infty$ CV.

$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^2 x\pi)}{n^2}$ CVN sur $\mathbb{R}$

d'où f continue sur $\mathbb{R}$.

TD Algèbre linéaire

(14)

$u \in \mathcal{L}(E)$

Soit $x \in E$, $(x, u(x))$ liée

But : x homothétie ssi on a $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha\, id_E$

On a $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$\lambda x + \mu u(x) = 0_E$

Soit $\mu \neq 0$ et $u(x) = -\frac{\lambda}{\mu} x$

Soit $\mu = 0$ et alors $\lambda \neq 0$ puis $x = 0_E$

et $u(x) = u(0_E) = 0_E$

$\forall x \in E, \exists \alpha_x \in \mathbb{K}, u(x) = \alpha_x x$

But : Si $x, y \in E$, on peut choisir $\alpha_x = \alpha_y$.

$$\begin{cases} u(x) = \alpha_x x \\ u(y) = \alpha_y y \end{cases}$$

Soit $z = x + y \in E$

On a $\alpha_z \in \mathbb{K}$ tq $u(z) = \alpha_z z = \alpha_z(x+y)$

$= u(x+y) = \alpha_x x + \alpha_y y$

~~Si~~ Soit (x,y) libre :
$(\alpha_z - \alpha_x)x + (\alpha_z - \alpha_y)y = 0_E$.

donc $\alpha_x = \alpha_z = \alpha_y$.

Soit (x,y) liée :

On a $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $y = \beta x$
ou $x = 0_E$.

si $x = 0_E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $u(x) = 0_E = \alpha x$.
on peut choisir $\alpha_x = \alpha_y$.

sinon, $u(y) = \alpha_y y = \alpha_y \beta x$
$= u(\beta x) = \beta \alpha_x x$

d'où Or $x \neq 0_E$ donc $\beta \alpha_x = \beta \alpha_y$.
si $\beta \neq 0$: alors $\alpha_x = \alpha_y$
si $\beta = 0$: $y = 0_E$
on peut choisir $\alpha_y = \alpha_x$.

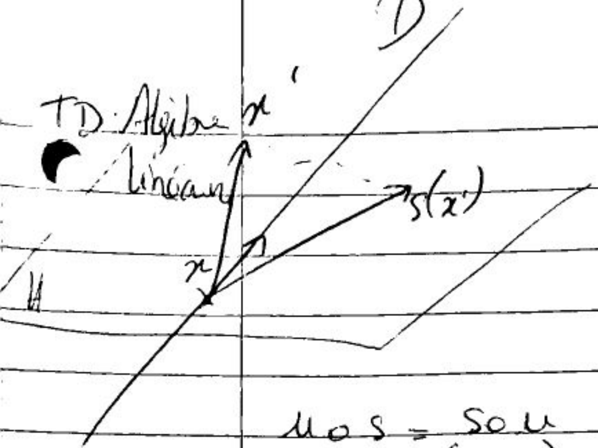
Dans tous les cas ~~$\alpha_x = \alpha_y$~~ on peut choisir $\alpha_x = \alpha_y$

Donc $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E \quad u(x) = \alpha x}$

- E de df
$\mathcal{Z}(GL(E)) = \{u \in GL(E), \forall v \in GL(E), u \circ v = v \circ u\}$

Soit $u \in \mathcal{Z}(GL(E))$
But : u est une homothétie.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$
But : $(x, u(x))$ liée.
$D = \mathrm{Vect}\, x$, H supplémentaire de D dans E.

TD Algèbre linéaire



s symétrie par rapport à D // à H.

$\forall x' \in E$,

$s \in \mathcal{GL}(E)$

$(s^2 = id_E$ donc s bijective et $s^{-1} = s)$

$u \circ s = s \circ u$

donc $u(s(x)) = \cancel{x}\, u(x)$

$= s(u(x))$

~~donc $s(x) = s^2(u(x)) = u(x)$~~

donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(s - id) = D$

$= \mathrm{Vect}\, x$

donc $(x, u(x))$ liée

d'après 1) u homothétie.

$$\boxed{\mathcal{Z}(\mathcal{GL}(E)) \supset \{\alpha\, id_E,\ \alpha \neq 0_K\}}$$

$\mathcal{B}$ base de E.

$\mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) = \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ \forall N \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ MN = NM\}$

Soit $M \in \mathcal{Z}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$

$\forall N \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $MN = NM$

avec $N = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$

avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \neq 0$.

Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$(MN)_{i,j} = (m_{i,j} \times a_j)_{i,j}$

$\parallel$

$(NM)_{i,j} = (\cancel{a_j}\, m_{i,j} \times a_i)_{i,j}$

$\forall i,j,\ m_{i,j}(a_i - a_j) = 0$

Si $i \neq j$, en ayant pris N tq $a_i \neq a_j$
on a $m_{i,j} = 0$.

donc $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & m_{n,n} \end{pmatrix}$

$\forall N \in GL_n(\mathbb{K}),\ MN = NM$.

$\forall i,j,\ m_{i,i} \times n_{i,j} = n_{i,j} \times m_{j,j}$.

$$N = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ & (0) & & (0) & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ & \ddots & & (0) \\ (0) & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \in GL_n(\mathbb{K})$$

$\forall i,j,\ m_{i,i} = m_{j,j}$

donc $Z(GL_n(\mathbb{K})) \subset \{\alpha I_n,\ \alpha \neq 0\}$
$\supset_{\text{ok}}$

TD: Algèbre linéaire

(18) $\mathrm{rg}(u+v) = \dim(\mathrm{Im}(u+v))$

$\mathrm{Im}(u+v) = \{u(x)+v(x),\ x\in E\}$

$\subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = \{u(x)+v(x'),\ (x,x')\in E^2\}$

$\mathrm{Rg}(u+v) \leq \dim(\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v)$

$\leq \dim(\mathrm{Im}\,u) + \dim(\mathrm{Im}\,v)$

$\leq \mathrm{Rg}\,u + \mathrm{Rg}\,v$

$\mathrm{Rg}(u+v-v) = \mathrm{Rg}\,u$

$\leq \mathrm{Rg}(u+v) + \underbrace{\mathrm{rg}(-v)}_{=\dim(-\mathrm{Im}\,v)}$

$= \dim(\mathrm{Im}\,v)$

$= \mathrm{Rg}\,v$

donc $\mathrm{Rg}\,u - \mathrm{Rg}\,v \leq \mathrm{Rg}(u+v)$

Rôles symétriques de u et v

donc $|\mathrm{Rg}\,u - \mathrm{Rg}\,v| \leq \mathrm{Rg}(u+v) \leq \mathrm{Rg}(u) + \mathrm{Rg}(v)$

(24)

1_ $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Analyse ~~[illegible]~~ Si on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$

Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$

$\varphi(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j})$

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} (0) & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,i} & a_{1,n} \\ & & \\ & a_{n,i} & \end{pmatrix} \qquad A \times E_{i,j} = \begin{pmatrix} (0) & \begin{matrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{j,i} \\ a_{n,i} \end{matrix} & (0) \end{pmatrix}$$

$\leftarrow j$