Exercice 11 :

$$u^2 - 4u + 3id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

donc $\frac{4}{3}u - \frac{1}{3}u^2 = id_E$

donc $u \circ \left(-\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}id_E\right) = id_E$

$= \left(-\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}id_E\right) \circ u$

les polynômes en u endomorphismes commutent toujours

$P(u) \circ Q(u) = (P \times Q)(u)$

donc u bijective et $u^{-1} = \frac{4}{3}id_E - \frac{1}{3}u$

But : $\ker(u - id_E) \oplus \ker(u - 3id_E) = E$

Analyse :

Si on a $x \in E$ tel que $x = x_1 + x_2$ (1)

avec $\begin{cases} x_1 \in \ker(u - id_E) & : u(x_1) = x_1 \\ x_2 \in \ker(u - 3id_E) & : u(x_2) = 3x_2 \end{cases}$

donc

$u(x) = u(x_1) + u(x_2)$

$= x_1 + 3x_2$ (2)

3(1) − (2) : $-u(x) + 3x = +2x_1$

$x_1 = -\frac{1}{2}u(x) + \frac{3}{2}x$

puis $x_2 = x - x_1$

$x_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u(x)$

unicité sous réserve d'existence

Synthèse Soit x_1 et x_2 de la sorte

Alors $x_1 + x_2 = x$

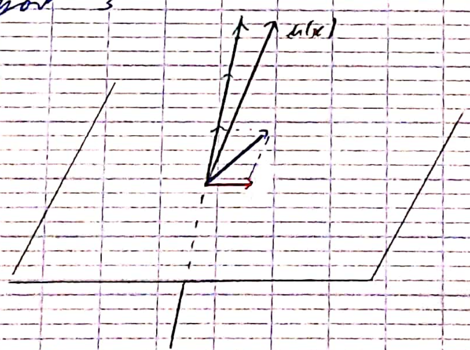
$$u(x_1) = \frac{3}{2} u(x) - \frac{1}{2} u^2(x)$$
$$= \frac{1}{2} (3u - u^2)(x) = \frac{1}{2}(-u + 3 \cdot id_E)(x)$$

$= x_1$ donc $x_1 \in \ker(u - id_E)$

$$u(x_2) = -\frac{1}{2} u(x) + \frac{1}{2} u^2(x)$$
$$= \frac{1}{2} (u^2 - u)(x) = \frac{1}{2} \times 3(u - id_E)(x)$$

$= 3 x_2$ donc $x_2 \in \ker(u - 3 \cdot id_E)$

u est une affinité de base $\ker(u - id_E)$ de direction $\ker(u - 3 \cdot id_E)$ de rapport 3



Exercice 19

Mq $rg(v \circ u) \geq rg(u) + rg(v) - \dim F$

donc mq $\dim(Im(v \circ u)) \geq \dim(Im(u)) + \dim(Im(v)) - \dim F$

avec $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$v \in \mathcal{L}(F,G)$

$v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$

But : mq $rg(v \circ u) \geq rg\, u + rg\, v - \dim F$

ie $rg(v \circ u) \geq rg\, u - \dim Ker\, v$

ie $rg(v \circ u) + \dim(Ker(v)) \geq rg(u)$

$$v_{|Im(u)} \left| \begin{array}{ccc} Im(u) = u(E) & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & v(y) \end{array} \right.$$

$Im(v_{|Im(u)}) = v(Im(u)) = v(u(E)) = Im(v \circ u)$

$Ker(v_{|Im\, u}) = Im(u) \cap Ker(v) \subset Ker(v)$

plus petit au sens de l'inclusion

Thm du rang

$$\underbrace{rg(v_{|Im(u)})}_{= rg(v \circ u)} + \underbrace{\dim(Ker(v_{|Im(u)}))}_{\leq \dim Ker\, v \leq \dim F - rg\, v} = \dim Im\, u = rg\, u$$

(thm du rang)

donc $rg(u) \leq rg(v \circ u) + \dim(F) - rg\, v$

donc $rg(v \circ u) \geq rg(u) + rg(v) - \dim F$

Exercice 21 :

1. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Analyse :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\varphi(M) = tr(AM)$$

Soit $i, j \in [1, n]$

$$\varphi(E_{i,j}) = tr(AE_{i,j})$$

$$tr(A \times E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} [A \times E_{i,j}]_{k,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \, [E_{i,j}]_{l,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \delta_{il} \, \delta_{jk}$$

$$= a_{j,i}$$

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} (0) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & (0) \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2i} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & a_{1i} & & \\ & \ddots & a_{2i} & & \\ (0) & & \vdots & (0) & \\ & 0 & a_{ji} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & a_{ni} & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} = A \times E_{i,j} \\ \\ \leftarrow j \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} & \end{array}$$

$$tr(AE_{i,j}) = a_{j,i}$$

donc $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$

$= (\varphi(E_{j,i}))_{i,j}$ car E_{ij} donne a_{ji} donc $a_{i,j} = E_{ji}$

unicité sous réserve d'existence

Synthèse : Soit une telle matrice

But $\varphi = \psi$ où $\psi : M \mapsto tr(AM)$

φ et ψ sont linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

et $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\psi(E_{i,j}) = tr(A E_{i,j})$$
$$= a_{j,i}$$
$$= \varphi(E_{i,j})$$

Comme $((E_{i,j}))_{i,j}$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\varphi = \psi$

d'où l'existence

2- On a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\varphi : M \mapsto tr(AM)$

$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$tr(AMN) = tr(ANM)$$

Soit $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$

$$tr(A E_{i,j} E_{k,l}) = tr(\delta_{j,k} A E_{i,l})$$
$$= \delta_{j,k}\, tr(A E_{i,l}) = \delta_{j,k}\, a_{l,i}$$

$\forall\, i, j, k, l$

$\delta_{j,k}\, a_{l,i} = \delta_{l,i}\, a_{j,k}$ (en identifiant i=k, j et l du calcul précédent)

<u>cas $j = k$ et $l = i$</u>, $\delta_{j,k} = 1$, $\delta_{l,i} = 1$

$\forall\, i, j \quad a_{i,i} = a_{j,j}$

<u>cas $j = k$ et $l \neq i$</u>, $\delta_{j,k} = 1$, $\delta_{l,i} = 0$

$\forall\, i, l$ avec $l \neq i$, $a_{l,i} = 0$

donc $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tq

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n \qquad \text{Matrice scalaire}$$

$\varphi : M \longmapsto tr(AM) = \lambda\, tr(M)$