Suites et séries de fonctions, 1re partie

1 CCINP 9 : définition de la convergence uniforme

Solution de 1 : CCINP 9 : définition de la convergence uniforme

1. Soit $g_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
   Dire que (g_n) converge uniformément vers g sur X signifie que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$
   Ou encore, (g_n) converge uniformément vers g sur $X \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in X} |g_n(x) - g(x)| \right) = 0$.

2. (a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \dfrac{n+2}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$.
   Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   En effet, $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-nx^2} |\cos\left(\sqrt{n}x\right)|$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2} |\cos\left(\sqrt{n}x\right)| \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

   (c) Soit $a > 0$.
   On a : $\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).
   Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-na^2} = 0$ (car $\dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-na^2} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-na^2}$).
   Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

   (d) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $]0, +\infty[$ car pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \leqslant 2$.
   D'autre part, f est bornée sur $]0, +\infty[$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ existe.
   On a $|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \dfrac{(n+2)\mathrm{e}^{-1}\cos 1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \mathrm{e}^{-1}\cos 1 \neq 0$.
   Or $\sup\limits_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})|$, donc $\sup\limits_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

2 CCINP 11 : condition de non convergence uniforme

Solution de 2 : CCINP 11 : condition de non convergence uniforme

1. Par contraposée :
   si (f_n) converge uniformément vers f alors :
   il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.
   C'est-à-dire la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$.
   Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ car $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2x^2}$.
   Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $a > 0$.
   $\forall\, x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a^2}$.
   Cette majoration est indépendante de x et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n^2a^2} = 0$.
   On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in\,]0, +\infty[$ et $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2}{4}}$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
   On en déduit, d'après 1., que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

3 CCINP 12 : Convergence uniforme et continuité

Solution de 3 : CCINP 12 : Convergence uniforme et continuité

1. Soit $x_0 \in [a, b]$.
   Prouvons que f est continue en x_0.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Par convergence uniforme, il existe un entier N tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow (\forall x \in [a, b], |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon)$.
   En particulier pour $n = N$, on a $\forall x \in [a, b], |f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon$. (*)
   Or la fonction f_N est continue en x_0 donc $\exists\, \alpha > 0$ tel que :
   $\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leqslant \varepsilon$. (**)
   D'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$.
   Alors d'après (*) et (**),
   $\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$.
   On en déduit que f est continue en x_0.

2. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 1 alors que g est discontinue en 1.
   D'après la question précédente, on en déduit que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers g sur $[0, 1]$.

4 CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

Solution de 4 : CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée sur X, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, |g_n(x)| \leqslant M_n. \quad (*)$$

Notons que ce majorant M_n dépend de n.

(g_n) converge uniformément vers g sur X. Ce qui signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon. \; (1)$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et fixons un entier N vérifiant (1) pour ce choix de ε.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leqslant 1$.
En particulier, $\forall x \in X, |g_N(x) - g(x)| \leqslant 1$. (**)
Or, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in X, |g(x)| \leqslant |g(x) - g_N(x)| + |g_N(x)|$.

Donc, d'après (*) et (**), $\forall x \in X, |g(x)| \leqslant 1 + M_N$.

Ce qui signifie que g est bornée sur X.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{1}{n} < |x|$.
Fixons un tel entier N.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{x}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$.
On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée car $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant n^2$.
Or f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la question précédente, (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

5 Étudier la convergence des suites de fonctions

1. $f_n : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \sqrt{n} \cos^n x \sin x$.
2. $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$.
3. $h_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.
4. $i_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$.
5. $j_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin\left(\dfrac{n+1}{n} x\right)$.

6

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f_n(x) = x^p \left(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > \alpha$.

7 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$.

Solution de 7 :

Quantité conjuguée.

8 Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f, (g_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g.

Vérifier que $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$.

Donner une condition suffisante simple portant sur h pour que la suite de fonction (hf_n) converge uniformément vers hf.

9 Montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce segment.

10 Théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définie les fonctions polynômes de Bernstein associées à f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définie sur $[0,1]$, par $B_n(f) : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x \mapsto 1$.
2. Que vaut, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}$? En déduire $B_n(\mathrm{id})$.
3. Calculer de même $B_n(v)$ où $v : x \mapsto x^2$.
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$.
   (b) Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel si $x, x' \in [0,1]$, $|x - x'| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Pour $x \in [0,1]$, on note $A_x = \left\{ k \in [\![0,n]\!],\ \left|\dfrac{k}{n} - x\right| \leqslant \eta \right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.
   (c) Montrer que
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k\in A_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2} x^k (1-x)^{n-k}.$$
   (d) En déduire que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\eta^2}$.
5. Conclure.

11 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $a \in \overline{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.

1. Montrer que si $a \in I$, on a bien $\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$ en appliquant un théorème de continuité.
2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geqslant N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n| \leqslant 2 + |f(x)|$.
3. Montrer que f est bornée au voisinage de a.
4. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b.
   Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une majoration de $|b_n - b|$ faisant intervenir b_n, b_{φ_n}, b, $f_n(x)$, $f_{\varphi(n)}(x)$, $f(x)$ où $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ et en déduire qu'il y a un rang à partir duquel $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.
6. En déduire que $b_n \to b$ et conclure à l'aide de prolongements par continuité.

Solution de 11 : Preuve du théorème de la double limite

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leqslant 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leqslant 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a, elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a.

On obtient donc, pour $n \geqslant N$, $|b_n| \leqslant 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolezano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \to b$.

On montre alors que $b_n \to b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + \left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| + \left|f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}\right| + \left|b_{\varphi(n)} - b\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geqslant n$, on a alors aussi $\left|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W_n' et W_n'' de a sur lesquel $|b_n - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $\left|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $\left|b_{\varphi(n)} - b\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geqslant \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W_n' \cap W_n''$, alors tire $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \to b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \to b$), qui est aussi continue a, donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

12 Que peut-on dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$?

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes, alors f est un polynôme.

1. Exercices vus en cours

13 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

14 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

15 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum n^\alpha x \mathrm{e}^{-n^2 x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Dans le cas contraire, préciser sur quels types d'intervalles il y a convergence normale.

16 Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

17 A-t-on convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$?

18 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de f.

19 Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et calculer de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série convergence normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la conclusion du théorème de la double-limite ne tient pas en 0^+.

20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

21 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On note f la somme de la série.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.
3. Étudier les variations de f.

2. Exercices CCINP

22 CCINP 8 : Séries alternées

Solution de 22 : CCINP 8 : Séries alternées

1. (a) $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$, donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geqslant 0$, donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.
   On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite.
   Comme $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.
   Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

   (b) Le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

2. On pose : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.
   On a alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.
   Si $x \geqslant 0$, alors $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
   Donc d'après 1.(a), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 |f_n(x)| = n e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   (b) Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on peut poser $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
   Alors, comme, $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :
   $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

Et donc $\forall x \in [0,+\infty[$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.
C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

23 CCINP 15 : Convergences normale et uniforme

Solution de 23 : CCINP 15 : Convergences normale et uniforme

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur X.
   On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in X} |f_n(t)|$.
   $\sum f_n$ converge normalement sur $X \iff \sum \|f_n\|_\infty$ converge.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $X \iff$ la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur X.

2. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur X.
   Les fonctions f_n sont donc bornées sur X et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
   Or, $\forall x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$.
   Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente, puisque les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X.
   On peut donc poser $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
   $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n+1 \Longrightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{N} f_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{N} |f_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_\infty$.
   Alors, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :
   $\forall x \in X$, $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. (majoration indépendante de x)
   Or $\sum f_n$ converge normalement sur X donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = 0$.
   On en déduit alors que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur X.
   Comme $R_n = S - S_n$, la suite (S_n) converge uniformément vers S sur X.
   C'est-à-dire $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n^2}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.
   On en déduit que série entière $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R.

24 CCINP 17 : CN de la série de fonction ⇒ CU du TG vers 0

Solution de 24 : CCINP 17 : CN de la série de fonction ⇒ CU du TG vers 0

1. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur A.
   On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur A.
   On pose alors, $\forall\, x \in A$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur A, c'est-à-dire (S_n) converge uniformément vers S sur A, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$, avec $||S_n - S||_\infty = \sup\limits_{x\in A} |S_n(x) - S(x)|$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in A$, $|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in A$,$|f_n(x)| \leqslant ||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty$ (majoration indépendante de x).
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (||S_n - S||_\infty + ||S_{n-1} - S||_\infty) = 0$.
   Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Soit $x \in [0; +\infty[$.
   Si $x = 0$:
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$:
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
   On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0; +\infty[$.

   Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée.
   De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
   En effet, si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^{-1}$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = |f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)|$; donc $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
   Ainsi, $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
   On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0; +\infty[$.
   Donc, d'après 1., $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

25 CCINP 18 : Convergence et continuité d'une série de fonctions

Solution de 25 : CCINP 18 : Convergence et continuité d'une série de fonctions

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $D =]-1, 1]$.

2. (a) $\forall\, x \in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
   $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas normalement sur D.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.

   (b) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1, 1[$. (*)
   Pour étudier la continuité en 1, on peut se placer sur $[0, 1]$.

   $\forall\, x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste.
   On a, $\forall\, x \in [0, 1]$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
   Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
   Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
   Les fonctions u_n étant continues sur $[0, 1]$, la somme S est alors continue sur $[0, 1]$.
   Donc, en particulier, S est continue en 1. (**)
   Donc, d'après (*) et (**), S est continue sur D.

26 CCINP 53 : Étude d'une série de fonctions

Solution de 26 : CCINP 53 : Étude d'une série de fonctions

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4 x^3}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   Conclusion : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
   • Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

$\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

• Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$\forall x \in [a,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{n^4x^4} = \dfrac{1}{n^4x^3} \leqslant \dfrac{1}{n^4a^3}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0,1]$, donc f_n est bornée sur $[0,1]$.
De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1,+\infty[$.
On en déduit que f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geqslant f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2n}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

Autre méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{1-3n^4x^4}{(1+n^4x^4)^2}$.

On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}, +\infty\right[$.

f_n étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n est bornée.

Donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe et $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}) = \dfrac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$. (1)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0,+\infty[$.
Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty,0[$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^3}$.
D'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.

Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Autres exercices

27 Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet [1]

On pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ.
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent en 1 en comparant à une intégrale.
7. Tracé le graphe de ζ.
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = \left(2^{1-x} - 1\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

Solution de 27 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet [2]

1. $]1, +\infty[$
2. $[a, +\infty[$ où $a > 1$.
3. $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{\ln^k(n)}{n^x}$. CN sur tout $[a, +\infty[$. D'où la classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\zeta^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln^k(n)}{n^x}$.
4. ζ est décroissante.
5. 1 par double limite.
6. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.
   2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme ζ st décroissante, elle a une limite finie ou $+\infty$ en 1.
   Or on a $\ell \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
   Donc $\ell = +\infty$.
   ou encore $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \geqslant A$ à partir d'un rang N.
   Pour $n = N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V, $\zeta(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^x} \geqslant A$.
7. $\dfrac{1}{x-1}$.

1. Incontournable : presque du cours.

8. CS sur $\mathbb{R}_*^+$ par TSSA.
   CN sur $[a, +\infty[$, $a > 1$.
   CU sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ par majoration du reste TSSA.
9. TSSA apcr : CU sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ de toutes les dérivées.
10. Simplifier $\phi(x) + \zeta(x)$.

28 Continuité et limites de $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$.

Solution de 28 :

Il y a convergence normale sur **R**, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4 + n^2 x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur **R** tout entier).

29 Démontrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi n^2 x\right)}{n^2}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de 29 :

Il y a convergence normale sur **R**, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin\left(\pi n^2 x\right)}{n^2}$ sont continues, donc f l'est (sur **R** tout entier).

30 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

Solution de 30 :

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2 x) = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur R_*^+, et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim_0 f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\widetilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leqslant R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}} \left(e^{-2x}\right)$$

31 Étudier la convergence sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x \mapsto (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right)$. Sa somme est-elle continue ?

Solution de 31 :

La convergence simple est conséquence du théorème spécial sur les séries alternées. Puis la majoration du reste dans ce même théorème permet d'écrire pour $n \in N$ et $x \in [0,+\infty[$, avec des notations habituelles,

$$|R_n(x)| \leqslant \ln\left(1+\frac{x}{n+2}\right)$$

Ce qui permet facilement d'avoir la convergence uniforme sur tout segment. Les fonctions $x \mapsto (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$ étant continues, la somme l'est.

32 **Oral des Mines**

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Parité de f.
3. Continuité de f.
4. Limite en $+\infty$
5. La convergence est-elle uniforme ?

Solution de 32 : Oral des Mines

1. La convergence simple se traite en distinguant le cas $t=0$. Mais sans difficulté. f est définie sur $\mathbf{R}$.

2. f est impaire.

3. Dérivons $f_n : t \mapsto \frac{2t}{t^2+n^2}$. La dérivée a le signe de $2(t^2+n^2)-2t(2t) = 2(n^2-t^2)$ et on en déduit que $|f_n|$ est maximale en $-n$ et en n. On trouve alors qu'il n'y a pas convergence normale. En revanche, il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout segment, ce qui suffit (en n'oubliant pas de dire que les f_n sont continues) pour établir la continuité de f.

En effet, soit K un segment. Soit $M>0$ tel que $K \subset [-M,M]$. L'étude des variations de f_n sur $[-M,M]$ monte que, si $n \geqslant M$, donc au moins à partir d'un certain rang,

$$\|f_n|_K\|_\infty \leqslant f_n(M) = \frac{2M}{M^2+n^2}$$

Or $\sum_n f_n(M)$ converge, donc $\sum_n \|f_n|_K\|_\infty$ converge.

4. Un comparaison à une intégrale donne la limite : π.

5. Et donc la convergence n'est pas uniforme, car le théorème de la double limite donnerait une limite nulle.

33

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Solution de 33 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $R \setminus \{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $R \setminus \{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$$

où on a noté $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$ la limite pour $A \to +\infty$ de $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$.

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} = \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^A \frac{x^2}{1+tx^2}\mathrm{d}t$$

On intègre avec des ln, on prend les limites quand $A \to +\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2, avec $1 \leqslant a \leqslant 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \sim_{x\to 0} -2\ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant n^2x^2. Donc, notant $b = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \sim_{x\to 0} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leqslant b \leqslant 2$, c'est agréable.

34 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = \mathrm{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.

Solution de 34 :

1. Pour f, on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :

   $$\left|\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\right| = \frac{1}{|x+n+1|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

   donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x \notin \mathbb{Z}^-$.

   Pour g, on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\dfrac{1}{n!(x+n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0, \lceil -x \rceil)$ (pour avoir $x+n>0$), et, bien sûr, $\dfrac{1}{n!(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On vérifie que f converge normalement sur $[1,+\infty[$: si $x \geqslant 0$, $\left|\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.

   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par double limite, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

   Pour g, on a pour $x \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right| = \dfrac{1}{n!(x+n)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1,+\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. On calcule

$$f(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)}$$
$$=x\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)}=x\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)=xf(x)-1.$$

Puis,

$$xg(x)=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)}=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}\right)=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$

(licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n=0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre <0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc

$$xg(x)=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)}=1+\mathrm{e}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)}=1+g(x+1).$$

4. On obtient alors pour tout x, $f(x)-g(x)=\dfrac{f(x+1)-g(x+1)}{x}$ puis par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f(x)-g(x)=\frac{f(x+n)-g(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

avec $f(t)-g(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et $\dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (c'est la convergence simple de f).

35 Montrer que $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx}+\mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

36 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n:x\in\mathbb{R}^+\mapsto\mathrm{Arctan}(x+n)-\mathrm{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$.
2. Montrer que $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Solution de 36 :

1. Utiliser le thoérème des accroissements finis. CN sur tout segment.
2. Se ramener au voisinage de 0 et utiliser la série divergente $\sum\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{n}$.