Suites et séries de fonctions, 1re partie

- Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$, on commence par la convergence simple qui donne une fonction limite f. Puis
  - ⋆ Soit on veut montrer qu'il y a convergence uniforme
    - on majore uniformément $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n$ indépendant de x convergent vers 0
    - Ou on trouve $\|f_n-f\|_\infty$ par une étude de fonction et on montre qu'elle tend vers 0
    - Pour une convergence sur tout segment, on cherche une majoration analogue à la précédente en utilisant les bornes du segment.
  - ⋆ Soit on veut montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme et on peut
    - Exhiber une suite (x_n) telle que $f_n(x_n)-f(x_n)\not\to 0$.
    - Montrer que f est non bornée ou non continue alors que les f_n le sont, ou (voir plus tard) que l'intégrale sur un segment des f_n ne converge pas vers l'intégrale de f.
- Et donc, avec des hypothèses à connaître, le caractère borné, la continuitése transmettent par convergence uniforme. On peut aussi échanger des limites avec l'hypothèse de convergence uniforme.
- Savoir aussi qu'on peut approcher uniformément sur un segment des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier et des fonctions continues par des polynômes (théorème de Weierstraß).
- Les propriétés définies à partir d'égalités ou d'inégalités larges se transmettent par convergence simple : positivité, monotonie, lipschitziannité (à rapport constant), linéarité, parité, périodicité.

1 CCINP 9 : définition de la convergence uniforme

2 CCINP 11 : condition de non convergence uniforme

3 CCINP 12 : Convergence uniforme et continuité

4 CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

5

Étudier la convergence des suites de fonctions

1. $f_n : x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\mapsto\sqrt{n}\cos^n x\sin x$.
2. $g_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}$.
3. $h_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{2^nx}{1+n2^nx^2}$.
4. $i_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.
5. $j_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$.

6

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \ f_n(x)=x^p\left(1+n^\alpha e^{-nx}\right)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p>\alpha$.

7

Soit $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $f_n : x\mapsto\sqrt{f(x)^2+\frac{1}{n}}$.

8

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f, (g_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g.

Vérifier que (f_n+g_n) converge uniformément vers $f+g$.

Donner une condition suffisante simple portant sur h pour que la suite de fonction (hf_n) converge uniformément vers hf.

9

Montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce segment.

10 Théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définie les fonctions polynômes de Bernstein associées à f, pour tout $n\in\mathbb{N}$, définie sur $[0,1]$, par $B_n(f) : x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x\mapsto 1$.
2. Que vaut, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}$? En déduire $B_n(\mathrm{id})$.
3. Calculer de même $B_n(v)$ où $v : x\mapsto x^2$.
4. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)|\leqslant M$.
   (b) Justifier l'existence de $\eta>0$ tel si $x,x'\in[0,1]$, $|x-x'|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(x)-f(x')|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Pour $x\in[0,1]$, on note $A_x=\left\{k\in[\![0,n]\!],\ \left|\dfrac{k}{n}-x\right|\leqslant\eta\right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.
   (c) Montrer que
$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k\in A_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2}x^k(1-x)^{n-k}.$$
   (d) En déduire que $|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{M}{2n\eta^2}$.
5. Conclure.

11 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f : I\to\mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $a\in\overline{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\xrightarrow[x\to a]{}b_n$.

1. Montrer que si $a \in I$, on a bien $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$ en appliquant un théorème de continuité.
2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geqslant N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n| \leqslant 2 + |f(x)|$.
3. Montrer que f est bornée au voisinage de a.
4. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b.
   Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une majoration de $|b_n - b|$ faisant intervenir b_n, b_{φ_n}, b, $f_n(x)$, $f_{\varphi(n)}(x)$, $f(x)$ où $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ et en déduire qu'il y a un rang à partir duquel $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.
6. En déduire que $b_n \to b$ et conclure à l'aide de prolongements par continuité.

12 Que peut-on dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$?

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes, alors f est un polynôme.

Séries de fonctions

- Il est absolument nécessairement de maîtriser les techniques d'étude des séries d'une part et des suites de fonctions d'autre part pour aborder ce TD.
- Problèmes de convergence :
  - **Convergence simple** : il s'agit d'une étude classique de série, avec un paramètre. Rappelons qu'on peut utiliser
    - La convergence absolue : $\sum |f_n(x)|$ à ne pas confondre avec la convergence normale. Utilisation des relations de comparaison $\leqslant, o, O, \sim$).
    - La comparaison série-intégrale si $f_n(x) = g(n,x)$ avec $t \mapsto g(t,x)$ monotone (par rapport à t et non x).
    - Le théorème spécial sur les séries alternées.
    - Plus rarement : le calcul des sommes partielles.
  - **Convergence normale** : celle qu'on recherche prioritairement, souvent même avant la convergence simple qu'elle implique (par convergence absolue) et la convergence uniforme. Une convergence normale sur tout segment est souvent suffisante.
  - **Convergence uniforme** : On s'y intéresse seulement lorsqu'il n'y a pas convergence normale (éventuellement sur tout segment). Cela revient à avoir la convergence uniforme vers 0 des restes. Penser par exemple à la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées, ou à une comparaison série-intégrale.
- Étude de la fonction somme d'une série de fonction :
  - **Continuité** : on utilise le théorème de transfert par convergence uniforme (sur tout segment).
  - **Limites, équivalents** : penser au théorème de la double limite (attention, aux bornes de l'intervalle, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.) S'il ne s'applique pas, on peut penser à une comparaison avec une intégrale.
    Pour les équivalents, c'est plus compliqué. On peut penser à la comparaison avec une intégrale, ou à sortir certains termes de la somme...

1. Exercices vus en cours

13 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

14 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

15 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum n^\alpha x \mathrm{e}^{-n^2 x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Dans le cas contraire, préciser sur quels types d'intervalles il y a convergence normale.

16 Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

17 A-t-on convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$?

18 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de f.

19 Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et calculer de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série convergence normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la conclusion du théorème de la double-limite ne tient pas en 0^+.

20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

21 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On note f la somme de la série.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.
3. Étudier les variations de f.

2. Exercices CCINP

22 **CCINP 8 : Séries alternées**

23 **CCINP 15 : Convergences normale et uniforme**

24 **CCINP 17 : CN de la série de fonction ⇒ CU du TG vers 0**

25 **CCINP 18 : Convergence et continuité d'une série de fonctions**

26 **CCINP 53 : Étude d'une série de fonctions**

3. Autres exercices

27 **Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet**[1]

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ.
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent en 1 en comparant à une intégrale.
7. Tracé le graphe de ζ.
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = \left(2^{1-x} - 1\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

1. Incontournable : presque du cours.

28 Continuité et limites de $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4 + n^2x^2}$.

29 Démontrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi n^2 x\right)}{n^2}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

30 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-n^2x}$.

Déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

31 Étudier la convergence sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right)$. Sa somme est-elle continue ?

32 **Oral des Mines**

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Parité de f.
3. Continuité de f.
4. Limite en $+\infty$
5. La convergence est-elle uniforme ?

33

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n + n^2x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

34 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.

35 Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-2nx} + e^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

36 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.