Rapport du Devoir en Temps Limité n° 3

Exercice 1 : Suites et suites de fonctions – E3A PSI 2010

Partie A

1. (a) Pour une première récurrence dans un sujet, il faut la poser proprement. Dire qu'on raisonne par récurrence. Poser la propriété. On voit encore des gens inclure le « $\forall n \in \mathbb{N}$ » dans la propriété, c'est très grave !

   Ici, il y avait une autre subtilité : outre le résultat attendu, on devait aussi s'assurer que les termes de la suite soient bien définis et cela devait figurer dans l'hypothèse de récurrence.

   (b) Pas de difficulté.
2. De trop nombreux élèves ne manipulent les indices de façon assez rigoureuses. Il fallait aussi bien poser n dès le départ en précisant l'ensemble dans lequel on le prenait.
3. Même remarque que pour la question précédente, le manque de rigueur sur les indice faisait descendre jusqu'au rang nul sans inquiétude alors que le passage du rang 1 au rang 0 est a expliquer.
4. De nouveau, les suites monotones puis adjacentes sont $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et non $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comment peut-on faire des maths sérieuses sans un minimum de rigueur ?

Partie B

1. Dans cette question, on s'attend d'une part à voir que vous savez ce qu'est une convergence simple de suite de fonctions et d'autre part à ce que vous ne vous emmêliez pas les pinceaux entre les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie A et les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduites ici. C'est assez rarement réussi !

   On s'attend en particulier à ce que vous précisiez la fonction f (qui à x associe la limite commune de $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$).
2. (a) On arrive sans trop de mal à déterminer $f(0)$ et $f(1)$ en déterminant au moins l'une des deux suites $(a_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ d'une part et $(a_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ d'autres part.

   Bien évidemment, comme d'habitude, cela ne doit pas être parachuté et tout doit être justifié.

   On acceptait une récurrence non posée si elle était tout de même annoncé.

   Éviter tout adjectif « immédiat », « facile », « évident », « trivial », etc. qui n'apporte strictement rien au raisonnement et peut agacer le correcteur.

   (b) Pas de difficulté.
3. Pour ceux qui ont compris ce qu'est effectivement la convergence uniforme, il est temps de comprendre qu'on ne majore jamais sous une valeur absolue ($|\cdot|$ n'est pas croissante.)
4. Si le théorème de continuité d'une limite de suite de fonction est en général connu, soulignons que la continuité des fonctions a_n ou b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'était pas si évidente ici.

Exercice 2 : Algèbre linéaire – E3A MP 2003

1. (a) Cette question n'aurait pas dû présenter de difficulté majeure et pourtant elle a été très mal faite en général. Il faut **absolument** faire des révision d'algèbre linéaire, c'est vital.

   (b) Question assez mal réussie également : savoir reconnaître le théorème de la base incomplète et en connaître les hypothèse.

   Savoir trouver la forme d'une matrice suivant la base choisie.

   Comment peut-on trouver dans plusieurs copie qu'une matrice est nulle alors qu'elle est censée être de rang 1 ?

   (c) Facile si et seulement si on a trouvé la matrice précédente, ce qui a très rarement été fait.

   (d) Le sens direct est une simple conséquence de ce qui précède (sans avoir nécessairement traité les questions.)

   Le sens réciproque demande un peu plus de travail : on mettait en uvre la même démarche, mais dans l'autre cas.

2. (a) Évidemment, il faut savoir ce qu'est une forme linéaire pour répondre (...) On ne peut pas se contenter de parler de linéarité de la trace ici.

   (b) Dans cette question, on a été très attentif à ce qu'il n'y ait pas de confusion entre la fonction $F(A) = F_A$ et la matrice $F(A)(X) = F_A(X)$.

   Il est temps de savoir que pour une fonction f, $f \neq f(x)$. On ne vous l'a jamais dit ?

   (c) Fait en TD. Il n'est pas tolérable que cette question ne soit pas traitée correctement.

   Pour l'injectivité, penser au noyau est une bonne idée. (En TD, l'unicité avait été vu grâce à l'analyse-(synthèse)).

   (d) La moitié du travail a été fait à la question précédente. Avec la linéarité, c'est un argument de dimension qui est attendu.

   Ah, oui, et, non, le bluff ne fonctionne pas.

3. Il y avait une typo : il ne fallait pas lire « soit f une forme linéaire non nulle sur $(i, j) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. » mais bien sûr « soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. ».

   Vous n'avez pas été trop gêné par cela semble-t-il.

   (a) Il n'y avait rien à faire dans cette question vu la question 2.d.

   (b) De nouveau, il fallait avoir les idées bien claires pour ne pas s'embrouiller, mais cette question ne présentait pas de difficulté majeure.

   À retenir (utile pour le noyau et présent dans les exercices de révision) : une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

   Avec, le rang, on recolle (évidemment ?) avec la première partie.

   (c) Ici, soit on utilise la première partie, soit on calcule la matrice de ψ_f dans une base adaptée (la base canonique convient ici) pour calculer sa trace.

Problème : Séries de fonctions d'après Centrale 2009 PC

Seules les parties 1 et 3 du sujet original ont été conservée. La partie 2 était plus technique, et le reste traitait d'intégrales généralisées et à paramètres.

Partie I – Préliminaires

I.A -

I.A.1) Lorsque l'on utilise un critère comparaison de séries à termes positifs, il faut bien insister sur la positivité.

I.A.2) Il faut bien sûr penser à la décomposition en éléments simples dans ce genre de situation. Ici un $+1-1$ au numérateur suffit.

On peut télescoper directement dans une somme infinie mais attention si on ne le fait pas à ne pas passer d'une somme qui existe à un différence de sommes qui n'existent pas.

I.A.3) Pas de difficulté.

I.A.4) Simple télescopage de nouveau.

I.B - Une comparaison série-intégrale demande das hypothèses (les bonnes !), un dessin est apprécié, et si on demande une majoration, inutile de minorer !

Pas de comparaison série-intégrale avec une somme infinie (et encore moins une intégrale jusqu'à l'infini, ce que nous n'avons pas encore étudié !) : repasser par des sommes (ou des restes) partiel(le)s.

Partie II – Séries factorielles

II.A -

II.A.1) A savoir faire : la simplification, le développement asymptotique, et la conclusion bien rédigée.

II.A.2) Pas toujours bien rédigée.

II.B - Pas si compliqué si on oublie que dans le programme officiel, on ne fait des comparaisons asymptotiques qu'avec des suites ne s'annulant plus à partir d'un certain rang.

II.C -

II.C.1) Parfais, la façon dont sont présenté les majorations laissent penser que vous majorez sous la valeur absolue voire, encore pire sous le module... Et le doute ne vous est bien sûr pas bénéfique...

II.C.2) Pas de difficulté.

II.C.3) Pas de difficulté.

II.D -

II.D.1) Pas de preuve, pas de point. Et pour la preuve, il est bien sûr judicieux d'utiliser II.B, la difficulté dans u_n est que le nombre de terme au dénominateur dépend de n.

II.D.2) Idem.

II.E -

II.E.1) La majoration n'était pas si évidente et pouvait s'obtenir par une comparaison à une intégrale (on pense à la série harmonique...).

II.E.2) Vu le théorème admis, tout résidait dans la convergence uniforme de la série des g_n', loin d'être évidente.