CORRIGÉ DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ Nº 3

Problème : Séries de fonctions d'après Centrale 2009 PC

Partie I – Préliminaires

I.A -

I.A.1) On a $u(n,p) \sim \dfrac{1}{n^{p+1}}$ avec $p+1>1$ donc par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u(n,p) \text{ est convergente.}}$

I.A.2) $\sigma(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1-0$ par telescopage, donc $\boxed{\sigma(1)=1.}$

I.A.3) Soit $p \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} = \frac{p}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

donc $\boxed{u(n,p-1)-u(n+1,p-1) = pu(n,p).}$

I.A.4) Donc, en sommant et télescopant, $u(1,p-1)-0 = p\sigma(p)$ et $\boxed{\sigma(p) = \dfrac{1}{p\cdot p!}.}$

I.B - Soient q un entier $\geqslant 2$ et N un entier naturel $\geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^q}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, donc, par comparaison série-intégrale, pour tout $k \geqslant N+1$, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{k} \frac{1}{n^q} \leqslant \int_N^k \frac{\mathrm{d}t}{t^q} = \frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{k^{q-1}} - \frac{1}{N^{q-1}}\right).$

En faisant $k \to +\infty$, $\boxed{R(N,q) \leqslant \dfrac{1}{(q-1)N^{q-1}}.}$

Partie II – Séries factorielles

II.A -

II.A.1) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) &= \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{(n+1)^x}{n^x}\right) = \ln n - \ln(x+n) + x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= -\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) + x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{x}{n}+\frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann, donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

II.A.2) Ainsi, par télescopage, pour tout $x>0$, $\ln(w_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha(x) \in \mathbb{R}$ et par continuité de l'exponentielle, $\boxed{w_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\alpha(x)} = \ell(x) \in \mathbb{R}_*^+.}$

II.B - D'après la question précédente, $u_n(x) \sim \ell(x)v_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$. Donc les séries à termes positifs de terme général $|a_n u_n(x)| = |a_n|\, u_n(x)$ et $|a_n v_n(x)| = |a_n|\, v_n(x)$ sont de même nature donc

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x) \text{ est absolument convergente si et seulement si } \sum_{n\geqslant 0} a_n v_n(x) \text{ est est absolument convergente.}}$$

II.C.1) Soit $\alpha > 0$ et $x \in [\alpha, +\infty[$. Alors $|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha)$ majorant indépendant de x et terme général de série convergente par hypothèse. Donc, $\|a_n u_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha)$ et par comparaison des séries à termes positifs,

$\boxed{\sum a_n u_n \text{ converge normalement sur } [\alpha, +\infty[.}$

II.C.2)(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n u_n$ est continue sur $]0, +\infty[$

(H2) $\sum a_n u_n$ converge uniformément au voisinage de tout réel strictement positif car converge normalement sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$

donc par théorème de continuité des séries de fonctions, $\boxed{f_a \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$

II.C.3)(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \sim \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque $x \to +\infty$ donc $a_n u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,

(H2) $\sum a_n u_n$ converge uniformément au voisinage de $+\infty$ car converge normalement sur $[1, +\infty[$

donc par théorème de la double limite, $\boxed{f_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.}$

II.D.1) Soit $\boxed{a = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_n.}$ Alors, pour tout $x > 0$, $\sum a_n v_n(x) = \sum \dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$ est absolument convergente en tant que série de Riemann avec $x + 1 > 1$, donc vu la question II.B, $a \in \mathscr{A}$.

II.D.2) $\boxed{a = (1)_n \notin \mathscr{A}}$ car $\sum a_n u_n(1)$ est la série harmonique à termes positifs qui ne converge pas.

II.E.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par opérations et si $x > 0$,

$$\left|\frac{u_n'(x)}{u_n(x)}\right| = \left|(\ln(u_n))'(x)\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \frac{1}{x} + \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{x+t} = \frac{1}{x} + \ln(x+n) - \ln x = \frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

par comparaison série intégrale, avec $t \mapsto \dfrac{1}{x+t}$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $\boxed{\left|u_n'(x)\right| \leqslant u_n(x)\left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{x}\right)\right).}$

II.E.2)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n u_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ d'après la question précédente.
- La série de fonctions $\sum a_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_*^+$ car absolument car $a \in \mathscr{A}$.
- Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_*^+$. Alors pour tout $x \in [\alpha, \beta]$,

$$\left|a_n u_n'(x)\right| \leqslant |a_n|\, u_n(\alpha)\left(\frac{1}{\alpha} + \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right) = \frac{|a_n|}{\alpha} u_n(\alpha) + |a_n| \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) u_n(\alpha)$$

qui ne dépend pas de x.

Or $\sum \frac{|a_n|}{\alpha} u_n(\alpha)$ converge car $a \in \mathscr{A}$ et par II.B, la convergence de $\sum |a_n| \ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) u_n(\alpha)$ est équivalente à celle de $\sum |a_n| \ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) v_n(\alpha) = \sum |a_n| \frac{\ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)}{(n+1)^\alpha}$. Mais si $0 < \gamma < \alpha$, alors par croissances comparées, $|a_n| \frac{\ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)}{(n+1)^\alpha} = \mathrm{o}\left(\frac{|a_n|}{(n+1)^\gamma}\right) = \mathrm{o}\left(|a_n|\, v_n(\gamma)\right)$ avec $\sum |a_n|\, v_n(\gamma)$ qui converge car $\sum |a_n|\, u_n(\gamma)$ (toujours par II.B et $a \in \mathscr{A}$), donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n| \ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) v_n(\alpha)$ puis $\sum |a_n| \ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) u_n(\alpha)$ et enfin $\sum |a_n|\, u_n(\alpha)\left(\frac{1}{\alpha}+\ln\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)\right)$ convergent, ce qui assure la convergence normale de $\sum a_n u_n'$ sur $[\alpha, \beta]$ (en fait même $[\alpha, +\infty[$.)

Finalement, par le théorème admis, $\boxed{f_a \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur l'intervalle }]0, +\infty[.}$

Fin