Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 3

Exercice 2 : Algèbre linéaire E3A MP 2003

1. (a) $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ est de dimension au plus 1 en tant que sous-espace de $\operatorname{Im} u$ qui est de dimension 1. Donc

   - Soit $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et comme avec le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$, $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u.}$
   - Soit $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 1 = \dim(\operatorname{Im} u)$ donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ c'est-à-dire $\boxed{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u.}$

   (b) Soit e un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$. Alors (e) est une famiile libre et le théorème de la base incomplète nous assure de $\boxed{\text{l'existence d'une base de } E \text{ dont le premier vecteur est } e.}$ Notons-la $\mathscr{B} = (e, e_2, \dots, e_n)$

   On suppose que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.On a alors $u(e) = 0_E$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, $u(e_k) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} e$ donc on a $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $u(e_k) = \lambda_k e$.

   Alors la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n \\ \vdots & \\ \vdots & (0) \\ 0 & \end{pmatrix}}$.

   (c) La trace d'un endomorphisme étant celle de n'importe quelle matrice qui le représente, la matrice de la question précédente nous donne bien $\boxed{\operatorname{tr} u = 0 \text{ lorsque } \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u.}$

   (d) D'après les questions 1.c et 1.a, si $\operatorname{tr} u \neq 0$, $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ donc $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
   Réciproquement, si $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, soit $\mathscr{B} = (e, e_2, \dots, e_n)$ une base adaptée à cette décomposition. Alors pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u(e_k) = 0_E$ et on a $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda e$ car, comme en 1.b, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} e$.

   La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est donc $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & (0) \\ 0 & \end{pmatrix}$ ce qui donne $\operatorname{tr} u = \lambda \neq 0$ sinon $e \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ ce qui est exclus car e est un vecteur de base.

   Finalement, $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u \text{ si et seulement si } \operatorname{tr} u \neq 0.}$

2. (a) On a $F_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ et si $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

   $$F_A(M + \lambda N) = \operatorname{tr}(A(M + \lambda N)) = \operatorname{tr}(AM) + \lambda \operatorname{tr}(AN) = F_A(M) + \lambda F_A(N)$$

   par linéarité de la trace, donc $\boxed{F_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*.}$

   (b) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

   $$F(A + \lambda B)(X) = F_{A+\lambda B}(X) = \operatorname{tr}((A + \lambda B)X) = tr(AX) + \lambda \operatorname{tr}(BX) = (F_A + \lambda F_B)(X)$$

   par linéairité de la trace, donc $F(A + \lambda B) = F_A + \lambda F_B$ c'est-à-dire $\boxed{F \text{ est linéaire.}}$

   (c) $F_A(E_{i,j}) = \operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \left[AE_{i,j}\right]_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \left[E_{i,j}\right]_{\ell,k}$ donc $\boxed{F_A(E_{i,j}) = a_{j,i}}$ vu la définition des $E_{i,j}$.

(d) F est une application linéaire et $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^* = \dim \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \dim \mathbb{C} = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) (= n^2)$, donc il suffit de démontrer que F est injective.

Or, si $A \in \operatorname{Ker} F$, $F_A = 0$ et en évaluant en particulier en les matrices élémentaires, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on obtient $A = 0$ d'après la question précédente.

Finalement, $\operatorname{Ker} F = \{0\}$ et F est injective, puis $\boxed{\text{un isomorphisme.}}$

3. Il fallait bien sûr comprendre f une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans l'énoncé.

(a) Avec l'isomorphisme F (question 2.d), $\boxed{\text{il y a une unique matrice } A \text{ qui convienne, il s'agit de } A = F^{-1}(f).}$

(b) $X \in \operatorname{Ker} \psi_f \iff \psi_f(X) = 0 \iff f(X)J = 0 \iff f(X) = 0$ car $J \neq 0$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker} \psi_f = \operatorname{Ker} f.}$

On a ensuite $\operatorname{Im} \psi_f = \psi_f(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = f(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))J$ donc $\operatorname{Im} \psi_f = (\operatorname{Im} f)J$. Mais $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{C}$ car f est une forme linéaire non nulle, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$ (vu la dimension). Donc $\boxed{\operatorname{Im} \psi_f = \operatorname{Vect} J.}$

Et comme $J \neq 0$, $\boxed{\operatorname{rg} \psi_f = 1.}$

(c) Calculons les cœfficients diagonaux de la matrice représentant ψ_f dans la base canonique.
Il s'agit des cœfficients selon $E_{i,j}$ de $\psi_f(E_{i,j})$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.
Or $\psi_f(E_{i,j}) = f(E_{i,j})J = \operatorname{tr}(AE_{i,j})J = a_{j,i}J$ avec la matrice A introduite en 3.a et vu 2.c.
Finalement, le cœfficient selon $E_{i,j}$ de $\psi_f(E_{i,j})$ est $a_{j,i}J_{i,j}$.
Donc, en passant par la matrice dans la base canonique,

$$\operatorname{tr} \psi_f = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_{j,i}J_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}J_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} [AJ]_{j,j} = \operatorname{tr}(AJ) = f(J).$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{tr}(\psi_f) = f(J).}$

On peux aussi voir qu'on se ramène à la situation de la question 1avec $\psi_f^2 : X \mapsto f(f(X)J)J = f(X)f(J)J$ donc la discussion sur le fait que $\operatorname{Im} \psi_f \subset \operatorname{Ker} \psi_f$ ou non revient à distinguer les cas où $f(J) = 0$ ou non. Dans les deux cas, on trouve $\operatorname{tr} \psi_f = f(J)$ car J convient comme vecteur e et $\psi_f(e) = \psi_f(J) = f(J)J = f(J)e$.