

CORRIGÉ DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 3

Exercice 1 : Suites et suites de fonctions - E3A PSI 2010

Partie A

1. (a) $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ s'obtient par récurrence simple sans encombre (à rédiger soigneusement sur la copie avec comme hypothèse de récurrence « a_n et b_n existent et sont positifs. »)

- (b) $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$ s'obtient directement en remplaçant a_{n+1} et b_{n+1} par les formules données dans l'énoncé.

2. La question précédente donne directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq a_{n+1}$.

Soit $n \geq 1$. On a alors $0 \leq b_n \leq a_n$ et donc $a_{n+1} \leq \frac{2a_n}{2} = a_n$ et $b_{n+1} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n$ car tout est positif.

Finalement, $0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$.

3. Soit $n \geq 1$. Vu la question précédente, $a_n b_n \geq b_n^2$ donc $b_n \leq \sqrt{a_n b_n}$ puis $a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n \leq a_n - b_n$ et enfin

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq a_n - b_n. \text{ Avec la question 1.b, on a alors pour tout } n \geq 1, a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n).$$

En itérant, on obtient pour tout $n \geq 1$, $a_n - b_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1)$.

Si, de plus, $1 = b_0 \leq a = a_0$, tout ce qui précède reposant sur cette inégalité s'étend au rang $n = 0$ et on peut écrire

$$a_1 - b_1 \leq \frac{1}{2}(a_0 - b_0) = \frac{1}{2}(a - 1) = \frac{1}{2}|1 - a|.$$

Sinon, il suffit d'échanger les rôles de a_0 et b_0 ce qui ne change pas les autres termes des suites, pour obtenir

$$a_1 - b_1 \leq \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{1}{2}|1 - a|$$

Finalement, pour tout $n \geq 0$, $a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}|1 - a|$.

4. D'après 2, $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont respectivement décroissante et croissante. Par la question précédente, $a_n - b_n \rightarrow 0$ (on a bien $0 \leq a_n - b_n$. Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite.

Partie B

1. La partie nous dit directement que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(a_n(x))_n$ et $(b_n(x))_n$ convergent vers une même limite que l'on peut noter $f(x)$. Par définition, les suites (a_n) et (b_n) convergent simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f .

2. (a) Avec $x = 0$, $a_0(0) = 0$ et on obtient par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $b_n(0) = 0$.

Or $b_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$ donc par unicité de la limite, $f(0) = 0$.

Avec $x = 1$, $a_0(1) = b_1(1) = 1$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 1$.

Or $a_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$ donc par unicité de la limite, $f(1) = 1$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Avec l'étude de la partie A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} = b_1(x) \leq a_n(x) \leq a_1(x) = \frac{1+x}{2}$. Donc en faisant

$$n \rightarrow +\infty, \quad \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}.$$

3. Soit A un réel strictement positif. Avec l'étude de la partie A, pour tout $x \in [0, A]$, la monotonie et la limite commune des suites nous dit que pour $n \geq 1$, $b_n(x) \leq f(x) \leq a_n(x)$ donc

$$|a_n(x) - f(x)| \leq b_n(x) - a_n(x) \leq \frac{1}{2^n} |1 - x| = \frac{1}{2^n} \max(1 - x, x - 1) \leq \frac{1}{2^n} \max(1, A - 1)$$

d'après A.3, majoration uniforme en x . Donc $a_n - f$ est bornée et $\|a_n - f\|_{\infty, [0, A]} \leq \frac{1}{2^n} \max(1, A - 1) \rightarrow 0$ et

(a_n) converge uniformément vers f sur $[0, A]$.

On montrer exactement de la même manière que (b_n) converge uniformément vers f sur $[0, A]$.

Remarque : Le $n \geq 1$ ne change rien sur le mode de convergence.

4. \star On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les fonctions a_n et b_n sont continues sur $[0, +\infty[$, par opérations usuelles sur les fonctions continues (à rédiger quand même, surtout pour E3A!).
- \star La suite de fonctions (a_n) (par exemple) converge uniformément vers f sur tout segment de la forme $[0, A]$ de \mathbb{R}^+ donc au voisinage de tout point de \mathbb{R}^+ .

Par théorème de transfert de continuité, f est donc continue sur \mathbb{R}^+ .