Mathématiques I

Présentation du sujet

L'épreuve de Mathématiques I proposée cette année portait exclusivement sur les propriétés des séries numériques. La première partie faisait voir que, lorsqu'on permute l'ordre des termes dans la série harmonique alternée, on peut obtenir une série convergeant vers n'importe quel réel choisi à l'avance. La seconde partie donnait une caractérisation des séries de terme général a_n telles que la série de terme général $a_n u_n$ converge lorsque u_n est une suite bornée ou bien lorsque u_n est le terme général d'une série convergente. L'énoncé donnait une place importante à l'écriture d'algorithmes permettant de mettre en évidence numériquement les propriétés théoriques des séries considérées.

Analyse globale des résultats

L'énoncé étant assez long (38 questions), une majorité de candidats A délaissé certaines questions (notamment, les questions ID1-5) qui constituaient des étapes cruciales dans la progression vers le résultat de la partie I. De même, les questions IID2a à IID3e, qui réclamaient un traitement particulièrement soigneux et un effort de réflexion certain, n'ont été abordées de façon satisfaisante que dans un petit nombre de copies.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Les correcteurs ont remarqué tout particulièrement les erreurs suivantes, qui semblent poser des difficultés à la majorité des candidats. Il s'agit pourtant de questions de base relatives aux suites ou séries numériques, que les futurs candidats sont invités à approfondir :

1. si v_n tend vers L, alors $v_n = L$ à partir d'un certain rang ;
2. si u_n est décroissante et minorée par 0, alors u_n converge vers 0 ;
3. si $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0, alors a_n converge ;
4. si $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0, alors a_n est une suite de Cauchy ;
5. si la série de terme général a_n converge, alors $a_n = O(1/n^2)$;
6. toute suite convergente d'entiers est monotone à partir d'un certain rang (énoncé non justifié et utilisé pour répondre à la question IC1) ;
7. si $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| + |u_{s(n)}|$, alors $|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s(n)}|)$;
8. pour traiter la question IC1, de nombreux candidats admettent sans justification le fait que la limite d'une suite d'entiers est un entier ;
9. p_n tend vers l'infini et $q_n = n - p_n$ alors q_n tend vers l'infini ;
10. si s est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ « vérifiant $Ker(s) = \{0\}$ », alors s est injective (cet énoncé n'a ici aucun sens puisque s n'est pas une application linéaire).

Les énoncés 1 à 5 sont des erreurs classiques sur les suites et séries numériques, qu'il est facile d'éviter en ayant bien assimilé la partie du cours portant sur ce thème. L'énoncé 6 est essentiellement équivalent à ce qu'il fallait démontrer et n'apporte rien. L'erreur 7 est une grave étourderie, puisqu'elle consiste à affirmer que $|a| + |b| \leq \max(|a|, |b|)$. Pour éviter ce genre d'erreur, il suffit de tester ce que l'on écrit sur un exemple numérique simple (par exemple $a = b = 1$). Les points 8 à 10 sont plus spécifiques au sujet de cette année.

Conclusion

Les correcteurs considèrent que la rédaction de la plupart des copies laisse beaucoup à désirer. Les futurs candidats doivent absolument faire des efforts particuliers en ce sens, et apprendre à rédiger de manière à la fois concise et précise. En effet, un raisonnement obscur, où certains arguments sont omis, mal compris ou même seulement imprécis, est toujours dévalorisé de façon significative par la notation. En outre, une rédaction claire des questions ou étapes intermédiaires d'un raisonnement aide les candidats eux-mêmes à mieux en comprendre le déroulement. Les correcteurs encouragent donc les élèves de classes préparatoires à progresser dans cette direction.