# Programme de colle – MP 1

## Révisions de MPSI : Groupe symétrique

Extrait du programme officiel de MPSI.

*Le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Généralités** | |
| Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. | Notation $S_n$. |
| Cycle, transposition. | Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$. |
| Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité. | La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation. Commutativité de la décomposition. |
| **b) Signature d'une permutation** | |
| Tout élément de $S_n$ est un produit de transpositions. | |
| Signature : il existe une et une seule application $\varepsilon$ de $S_n$ dans $\{-1,1\}$ telle que $\varepsilon(\tau)=-1$ pour toute transposition $\tau$ et $\varepsilon(\sigma\sigma')=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations $\sigma$ et $\sigma'$. | La démonstration n'est pas exigible. |

## Révisions de MPSI : Déterminant

Extrait du programme officiel de MPSI.

*Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :*

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

*Dans tout ce chapitre, $E$ désigne un espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Formes $n$-linéaires alternées** | |
| Forme $n$-linéaire alternée. | La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. |
| Antisymétrie, effet d'une permutation. | Si $f$ est une forme $n$-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$. |
| **b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base** | |
| Si $e$ est une base, il existe une et une seule forme $n$-linéaire alternée $f$ pour laquelle $f(e)=1$. Toute forme $n$-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$. | Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible. |
| Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. | Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède). |
| Comparaison, si $e$ et $e'$ sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. | |
| La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$. | |
| Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. | ⇆ PC : orientation d'un espace de dimension 3. |
| **c) Déterminant d'un endomorphisme** | |
| Déterminant d'un endomorphisme. | |
| Déterminant d'une composée. | Caractérisation des automorphismes. |
| **d) Déterminant d'une matrice carrée** | |
| Déterminant d'une matrice carrée. | |
| Déterminant d'un produit. | Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles. |
| Déterminant d'une transposée. | |
| **e) Calcul des déterminants** | |
| Effet des opérations élémentaires. | |
| Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. | |
| Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire. | |
| Déterminant de Vandermonde. | |
| **f) Comatrice** | |
| Comatrice. | Notation $\mathrm{Com}(A)$. |
| Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A)={}^t\mathrm{Com}(A)A=\det(A)I_n$. | Expression de l'inverse d'une matrice inversible. |

*Semaine prochaine :* Réduction (suite et fin).

## Questions de cours :

(i) Deux exercices : détermination du centre de $\mathfrak{S}_n$ en commençant par une condition nécessaire simple pour qu'une permutation commute avec une transposition et détermination du conjugué $\sigma c\sigma^{-1}$ d'un cycle $c$ par une permutation $\sigma$.

(ii) Partie de la preuve du théorème fondamental : si $f$ est une forme $n$-linéaire alternée sur $E$ de dimension $n$ et $\mathscr{B}$ une base de $E$ fixée, $f$ est colinéaire à l'application (qui deviendra le) déterminant dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) Déterminant d'une transposée.

(iv) Déterminant de Vandermonde (par les polynômes).

(v) Déterminants triangulaires par blocs (en utilisant le fait que les formes $n$-linéaires alternées en dimension $n$ forment un espace de dimension 1).

(vi) **CCINP 63** :Soit un entier $n\geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels :

$$A_n=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n\geqslant 1$, on désigne par $D_n$ le déterminant de $A_n$.

(a) Démontrer que $D_{n+2}=2D_{n+1}-D_n$.

(b) Déterminer $D_n$ en fonction de $n$.

(c) (5/2) Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de $A$ ?