# Programme de colle – MP 1

## 1. Continuité, uniforme continuité des fonctions numériques

Révision du programme de MPSI (voir page suivante).

La caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité est utile en particulier pour démontrer une absence d'uniforme continuité.

Le théorème de Heine permet en particulier de démontrer le théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

La fonction racine carrée est un exemple d'application uniformément continue (car 1/2-hölderienne) mais non lipschitzienne.

## 2. Polynômes et fractions rationnelles

Révision du programme de MPSI : voir programme officiel page suivante.

Extrait du programme officiel :

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **h) Anneaux de polynômes à une indéterminée** | |
| *Dans ce paragraphe, $K$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.* | |
| Idéaux de $K[X]$. | |
| PGCD de deux polynômes. | Par convention, le PGCD est unitaire. Extension au cas d'une famille finie. |
| Relation de Bézout. Lemme de Gauss. | ⇆ I : algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche simultanée du PGCD et des coefficients de Bézout. |
| Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles. | Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme. |

*Semaine prochaine :* Révisions de groupe symétrique, déterminant. Début de la réduction.

### Questions de cours :

(i) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau principal (et en particulier intègre). Description de son groupe d'inversibles.

(ii) Caractérisations séquentielles de la continuité : $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour tout suite $(a_n)$ telle que $a_n \to a$, $f(a_n) \to f(a)$ si et seulement si pour tout suite $(a_n)$ telle que $a_n \to a$, $(f(a_n))_n$ converge.

(iii) Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité.

(iv) Théorème de Heine.

(v) Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier (cas des fonctions continues bien détaillé).

(vi) Une fonction lipschitzienne est uniformément continue. La fonction racine carrée est un exemple d'application uniformément continue (car 1/2-hölderienne) mais non lipschitzienne.

(vii) Théorème de Bézout, lemme de Gauß dans $\mathbb{K}[X]$, $A\wedge BC=1 \Longleftrightarrow A\wedge B=A\wedge C=1$.

(viii) (Preuve revue mardi seulement, mais figure dans le cours de MPSI) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau factoriel : existence et unicité de la décomposition en irréductibles.

(ix) **CCINP 85 :**

(a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.

i. Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.

ii. Soit $r\in\mathbb{N}^*$. En déduire que :
$a$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $r$ si et seulement si $P^{(r)}(a)\neq 0$ et $\forall k\in[\![0,r-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$.

(b) Déterminer deux réels $a$ et $b$ pour que 1 soit racine double du polynôme $P=X^5+aX^2+bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

(x) **CCINP 87** : Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

(a) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P$ vérifiant $\deg P \leqslant n$ et $\forall i\in\{0,\cdots,n\}$ $P(a_i)=b_i$.

(b) Soit $k\in[\![0,\ldots,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme $P$, que l'on notera $L_k$, lorsque $\forall i\in[\![0,\ldots,n]\!]$ $b_i=\begin{cases} 0 \text{ si } i\neq k\\ 1 \text{ si } i=k\end{cases}$

(c) Prouver que $\forall p\in[\![0,\ldots,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

(xi) **CCINP 90** : $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient $a_1, a_2, a_3$ trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \left(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\right)\end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) On note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k\in\{1,2,3\}$, $L_k=\Phi^{-1}(e_k)$.

i. Justifier que $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

ii. Exprimer les polynômes $L_1, L_2$ et $L_3$ en fonction de $a_1, a_2$ et $a_3$.

(c) Soit $P\in\mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $P$ dans la base $(L_1, L_2, L_3)$.

(d) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points $A$, $B$ et $C$.

## 3. Programme de MPSI

### A. Continuité

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Continuité** | |
| Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Continuité sur un intervalle. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **Image d'un intervalle par une fonction continue** | |
| Théorème des valeurs intermédiaires. | Cas d'une fonction strictement monotone.<br>⇆ I : application de l'algorithme de dichotomie à la recherche d'un zéro d'une fonction continue. |
| L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. | |
| **Image d'un segment par une fonction continue** | |
| Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.<br>L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. | La démonstration n'est pas exigible. |
| **Continuité et injectivité** | |
| Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.<br>La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue. | La démonstration n'est pas exigible. |
| **Fonctions complexes** | |
| Brève extension des définitions et résultats précédents. | Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire. |
| **Continuité uniforme** | |
| Continuité uniforme. | |
| Théorème de Heine. | La démonstration n'est pas exigible. |

## B. Polynômes et fractions rationnelles

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Anneau des polynômes à une indéterminée** | |
| Anneau $\mathbb{K}[X]$. | La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas exigible.<br>Notations $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i, \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$. |
| Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. | Le degré du polynôme nul est $-\infty$.<br>Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n$. |
| Degré d'une somme, d'un produit. | Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. |
| Composition. | ⇆ I : représentation informatique d'un polynôme ; somme, produit. |
| **b) Divisibilité et division euclidienne** | |
| Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. | Caractérisation des couples de polynômes associés. |
| Théorème de la division euclidienne. | ⇆ I : algorithme de la division euclidienne. |
| **c) Fonctions polynomiales et racines** | |
| Fonction polynomiale associée à un polynôme.<br>Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. | |
| Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. | Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. |
| Multiplicité d'une racine. | Si $P(\lambda) \neq 0$, $\lambda$ est racine de $P$ de multiplicité 0. |
| Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines. | Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible. |
| **d) Dérivation** | |
| Dérivée formelle d'un polynôme. | Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.<br>Formule de Taylor polynomiale.<br>Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs. | |
| **e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$** | |
| PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. | Tout diviseur commun à $A$ et $B$ de degré maximal est appelé un PGCD de $A$ et $B$. |
| Algorithme d'Euclide. | L'ensemble des diviseurs communs à $A$ et $B$ est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$. |
| Relation de Bézout. | L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout.<br>⇆ I : algorithme d'Euclide étendu.<br>L'étude des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. |
| PPCM. | Notation $A \vee B$.<br>Lien avec le PGCD. |
| Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout.<br>Lemme de Gauss.<br>PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux. | |
| **f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$** | |
| Théorème de d'Alembert-Gauss.<br>Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. | La démonstration est hors programme.<br>Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.<br>Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. |
| Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. | |
| **g) Formule d'interpolation de Lagrange** | |
| Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i$ : $\quad P(x_i) = y_i$. | Expression de $P$.<br>Description des polynômes $Q$ tels que pour tout $i$ : $\quad Q(x_i) = y_i$. |
| **h) Fractions rationnelles** | |
| Corps $\mathbb{K}(X)$.<br>Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.<br>Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités. | La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible. |
| **i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$** | |
| Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. | La démonstration est hors programme.<br>On évitera toute technicité excessive.<br>La division selon les puissances croissantes est hors programme. |
| Si $\lambda$ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$.<br>Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$. | |