Programme de colle – MP 1

1. Suites et séries de fonctions numériques d'une variable réelle

Les fonctions sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A. Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A. Démonstration non exigible. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
e) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.
f) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) [1] ci-dessus.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

On introduit la notion de norme uniquement pour manipuler la norme ∞ pour le moment.
L'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions seront traitées plus tard.
Le théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier n'a pas encore été démontré.

2. Calcul matriciel

Révisions complètes du programme de première année. Voir page suivante.

Semaine prochaine : Révisions de continuité, polynômes, déterminants.

1. Continuité, limite.

Questions de cours :

(i) Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

(ii) Une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est une fonction polynomiale.

(iii) Tout énoncé de théorème concernant les séries de fonctions avec **hypothèses très précises** (caractère borné, continuité locale ou globale, limite).

Définition et implications entre les différents modes de convergence (simple, uniforme, absolue, normale).

(iv) Fonction ζ de Riemann : définition, convergence simple, normale, variations, limites en 1 et $+\infty$, équivalent en 1, absence de convergence uniforme au voisinage de 1, tracé.

(v) **CCINP 8** :

(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

(b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

(vi) **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

(b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

(c) La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

(vii) **CCINP 17** : Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

(a) Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

(b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

(viii) **CCINP 18** : On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

(a) Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

(ix) **CCINP 53** : On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

(a) i. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(x) **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

(a) Démontrer que f est bijectif de deux manières :

i. sans utiliser de matrice de f,

ii. en utilisant une matrice de f.

(b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

(c) $(5/2)f$ est-il diagonalisable ?

(xi) **CCINP 71** : Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

(a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(b) Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

3. Révisions de MPSI

A. Calcul matriciel

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces de matrices	
Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
b) Produit matriciel	
Bilinéarité, associativité.	
Produit d'une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
c) Transposition	
Transposée d'une matrice.	Notations ${}^tA$, A^T.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	

B. Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases.	Notation $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.	
d) Blocs	
Matrice par blocs.	Interprétation géométrique.
Théorème du produit par blocs.	La démonstration n'est pas exigible.

C. Changements de bases, équivalence et similitude

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$.
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.	
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	Interprétation géométrique.
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique.
Trace d'une matrice carrée.	
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	Notations $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$.
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notations $\mathrm{tr}(u)$, $\mathrm{Tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

D. Opérations élémentaires et systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations élémentaires	
Interprétation en termes de produit matriciel.	Les opérations élémentaires sont décrites dans le paragraphe « Systèmes linéaires » du chapitre « Calculs algébriques ».
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
b) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle d'un système linéaire.	Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.
Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace des solutions.	
Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions.	
Le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible. Système de Cramer.	Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.
§ Algorithme du pivot de Gauss.	