Programme de colle – MP 1

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

Révisions complètes du cours d'algèbre linéaire de MPSI concernant les espaces vectoriels et les applications linéaires.

2. Suites de fonctions numériques d'une variable réelle

Les fonctions sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A. Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $$u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$	Démonstration non exigible. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

On introduit la notion de norme uniquement pour manipuler la norme ∞ pour le moment.
L'intégration et la dérivation des suites de fonctions seront traitées plus tard.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Théorème du rang.

(ii) Formule de Grassmann : deux démonstrations avec des supplémentaires et avec des applications linéaires.

(iii) La norme ∞ sur un espace de fonctions bornées est une norme.

(iv) Transfert du caractère borné et de la continuité par uniforme convergence.

(v) **CCINP 9** :

(a) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

(b) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.

i. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

ii. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

iii. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

iv. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

(vi) **CCINP 11** :

(a) Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

i. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

ii. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0,+\infty[$.

(vii) **CCINP 12** :

(a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a,b]$.
Démontrer que f est continue en x_0.

(b) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

(viii) **CCINP 13** :

(a) Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
Démontrer que la fonction g est bornée.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?