

CHAPITRE VII

# Continuité des fonctions numériques (MPSI)

## TABLE DES MATIÈRES

### VII CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES (MPSI)

I	Continuité	1
1	Définition	1
2	Cas des fonctions à valeurs réelles	1
II	Uniforme continuité	3
III	Fonctions lipschitziennes	5

## I CONTINUITÉ

### 1 Définition

**Définition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $a \in I$ .

$f$  est dite continue en  $a$  si et seulement si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ , si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ .  $f$  est dite **continue sur**  $I$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}(I)$  ou  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^0(I)$  l'ensemble de telles fonctions.

**Remarques**

R1 – Ainsi,  $f$  n'est pas continue en  $a$  si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$

R2 –  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f$  est définie en  $a$  et a une limite finie en  $a$ .

R3 –  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\Re c(f)$  et  $\Im m(f)$  le sont.

**Propriété : Caractérisations séquentielles**

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow a, f(a_n) \rightarrow f(a).$$

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow a, (f(a_n)) \text{ converge.}$$

**Remarques**

R1 – Une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues l'est encore.

$\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  est une sous-algèbre de  $(\mathbb{K}^I, +, \times, \cdot)$ .

R2 – Être continue en  $a$  est équivalent à être continue à gauche et à droite de  $a$ .

### 2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

**Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Si  $a, b \in I$  tels que  $a < b$  et  $m \in [f(a), f(b)]$ , alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $m = f(c)$ .

Autrement dit,  $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ .



**Remarque**

$[f(a) \overleftarrow{;} f(b)]$  signifie  $[f(a), f(b)]$  ou  $[f(b), f(a)]$  selon la position relative de  $f(a)$  et  $f(b)$ .

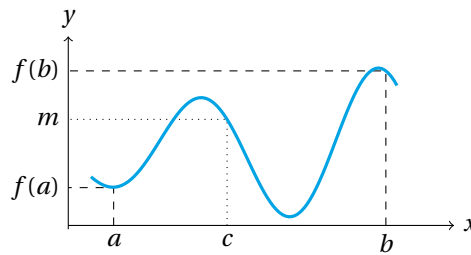


FIGURE 1 – Le théorème des valeurs intermédiaires

**Remarque**

La réciproque est fautive : on peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continu.

C'est le cas par exemple de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  discontinue en 0.

**Corollaire : Extension du théorème des valeurs intermédiaires**

Si  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b$ ,  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $]a, b[$  et admet des limites  $\lim_{a^+} f$  à droite de  $a$  et  $\lim_{b^-} f$  à gauche de  $b$ , alors pour tout  $m \in \left] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f \right[$ , on a  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = m$ .

Autrement dit,  $\left] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f \right[ \subset f(]a, b[)$ .

**Exemple**

Un polynôme de degré impair a toujours au moins une racine réelle.

En effet, comme on a des limites  $\pm\infty$  ou  $\mp\infty$  en  $\pm\infty$ , notre polynôme prend au moins une valeur positive et une valeurs négative sur  $\mathbb{R}$ .

**Corollaire : Image continue d'un intervalle**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autrement dit, si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

**Remarques**

R1 –  $\triangle!$  En général  $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$  et  $f(]a, b[) \neq \left] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f \right[$ .

R2 – Le type de l'intervalle n'est pas conservé en général.

**Théorème**

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , alors on a  $c, d \in [a, b]$  tels que  $f(c) = \min_{[a,b]} f$  et  $f(d) = \max_{[a,b]} f$ .

**Corollaire : Image continue d'un segment**

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.  
Avec les notations précédentes,  $f$  étant continue sur  $[a, b]$ ,

$$f([a, b]) = \left[ \min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f \right] = [f(c), f(d)]$$

**Propriété**

Si  $f$  est continue et injective sur un intervalle  $I$ ,  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

**Théorème : Théorème de la bijection**

Soit  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles. Alors

- (i)  $f$  induit une bijection  $\tilde{f}$  de  $I$  sur  $J = f(I)$ .
- (ii)  $\tilde{f}^{-1}$  est strictement monotone de même monotonie que  $f$ .
- (iii)  $\tilde{f}^{-1}$  est continue sur  $J$ .

**Définition : Homéomorphisme**

$f : I \rightarrow J$  est appelé **homéomorphisme** lorsque  $f$  est bijective et bicontinue, c'est-à-dire  $f$  continue sur  $I$  et  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ .

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

**Théorème : Théorème de l'homéomorphisme**

Toute fonction continue strictement monotone induit de  $I$  sur  $J = f(I)$  un homéomorphisme.

## II UNIFORME CONTINUITÉ

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point  $a$ , si je me reproche de  $a$ , alors mon image par  $f$  se rapproche de  $f(a)$ , ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

**Définition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que  $f$  est **uniformément continue** sur  $I$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Cela impose que si  $x$  et  $y$  sont suffisamment proches, mais n'importe où dans  $I$ , alors  $f(x)$  et  $f(y)$  sont proches également. Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

**Propriété**

Une fonction uniformément continue sur  $I$  est continue sur  $I$ . Réciproque fausse.

**Démonstration**

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall a, x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

alors

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Propriété : Caractérisation séquentielle**

$f$  est uniformément continue sur  $I$  si et seulement si  $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .



**Remarque**

N'apparaît pas dans le programme officiel, mais très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

**Démonstration**

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  uniformément continue et  $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\varepsilon > 0$ .

On a  $\eta > 0$  tel que  $\forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  or on a  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, x_n - y_n \leq \eta$ , ainsi  $\forall n \geq N, f(x_n) - f(y_n) \leq \varepsilon$  et donc  $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Par contraposée, si  $f$  n'est pas uniformément continue, on a  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall \eta > 0, \exists x, y \in I, |x - y| \leq \eta$  et  $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\eta = \frac{1}{n+1}$ , on a  $x_n, y_n$  des réels tels que  $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$  et  $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ . Ainsi,  $x_n - y_n \rightarrow 0$  et  $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$ . □

**Propriété**

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Faux pour un produit ou un quotient.

**Exemples**

E1 - Les fonctions constantes,  $x \mapsto x$  sont uniformément continues.

E2 -  $f : x \mapsto ax + b$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

E3 -  $f : x \mapsto |x|$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

E4 -  $f : x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  : problème si  $x \rightarrow \pm\infty$  (pente trop forte).  $x_n = n + \frac{1}{n}, y_n = n$  alors  $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  mais  $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\rightarrow 0$ .

E5 -  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$  (malgré la pente infinie en 0) : si  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , on peut supposer  $x_n \geq y_n$ , alors

$$(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 = x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n \leq x_n - 2y_n + y_n = x_n - y_n \rightarrow 0.$$

Donc  $|\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}| \leq \sqrt{|x_n - y_n|}$ . Donc  $\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n} \rightarrow 0$ .

E6 -  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  problème si  $x \rightarrow 0$  (pente trop forte).

$x_n = \frac{2}{n}, y_n = \frac{1}{n}$  alors  $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  mais  $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = -\frac{n}{2} \not\rightarrow 0$ .

**Remarque**

La fonction  $\sqrt{\cdot}$  vérifie  $\forall x, y, \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq k \times |x - y|^{1/2}$ , on dit qu'elle est 1/2-hölderienne. Toute fonction  $\alpha$ -hölderienne est facilement uniformément continue.

**Théorème : de Heine**

Tout fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

**Démonstration**

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  continue non uniformément continue, on a  $\varepsilon > 0$  et  $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  telles que  $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et pour tout  $n, f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$ . (voir preuve de la caractérisation séquentielle).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée  $x$  une suite convergente  $(x_{\varphi(n)})_n$ , puis de la suite bornée  $(y_{\varphi(n)})_n$  une suite convergente  $(y_{\varphi \circ \psi(n)})_n$ . Alors  $(x_{\varphi \circ \psi(n)})_n$  est aussi convergente comme suite extraite de  $(x_{\varphi(n)})_n$  et  $x_{\varphi \circ \psi(n)} - y_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow 0$  donc les deux limites sont égales à  $\ell$ .

Alors, par continuité,  $f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(\ell)$  et  $f(y_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(\ell)$  donc

$$f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) - f(y_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow 0$$

ce qui contredit  $f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) - f(y_{\varphi \circ \psi(n)}) > \varepsilon$ . □

**Théorème**

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

**Démonstration**

**Cas continu** Soit  $\varepsilon > 0$ . Par théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . On a donc  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On choisit une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  de pas  $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \eta$ .

On définit alors  $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[ \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$  une fonction en escalier.

Alors, si  $x \in [a, b]$ , on a  $k$  tel que  $x \in [a_k, a_{k+1}[$  et  $|x - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| \leq \eta$  donc  $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon$ , soit  $x = b$  et  $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$ .

On a donc bien  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ .

**Cas continu par morceaux** Soit  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ .

Chaque  $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$  se prolonge par continuité en une fonction  $f_k$  continue sur  $[a_k, a_{k+1}]$  : on a  $\varphi_k \in \mathcal{E}([a, b])$  telle que  $\|f_k - \varphi_k\|_\infty \leq \varepsilon$ .

On pose alors  $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in ]a_k, a_{k+1}[ \\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$  une fonction en escalier.

Alors, si  $x \in [a, b]$ , soit on a  $k$  tel que  $x \in ]a_k, a_{k+1}[$  et  $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$  soit on a  $k$  tel que  $x = a_k$  et  $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leq \varepsilon$ .

On a donc bien  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ .

**III FONCTIONS LIPSCHITZIENNES****Définition**

$f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $k$ -lipschitzienne sur  $X$  (où  $k \in \mathbb{R}_+^*$ ) si

$$\forall x, y \in X, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

**Propriété**

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hôlderienne) sur  $I$  y est uniformément continue. La réciproque est fautive.

**Remarque**

$f$  lipschitzienne  $\iff f$  uniformément continue  $\iff f$  continue.

Plus précisément :

$f$  lipschitzienne  $\implies f$  hôlderienne  $\implies f$  uniformément continue  $\implies f$  continue.

**Démonstration**

$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$  ( $\alpha = 1$  si lipschitzienne).

Donc si  $x_n - y_n \rightarrow 0, f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ . □

**Exemples**

E1 -  $\sqrt{\cdot}$  est uniformément continue mais pas lipschitzienne car si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$$

avec  $k > 0$ , on va avoir un problème près de zéro (pente trop forte). Pour  $y = 0$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq kx$  et si  $x \neq 0, \sqrt{x} \geq \frac{1}{k}$  donc  $x \geq \frac{1}{k^2}$ . Contradiction.



E2 – Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur  $I$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$  (c'est le cas si elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ ) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions sin et cos.