

CHAPITRE VI

Suites et séries de fonctions (1^{re} partie)

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A .	
Convergence uniforme sur A . La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a , alors u est continue en a .	
Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A .	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A .
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A , et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n , u_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et	Démonstration non exigible. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$	
e) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment γ est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.
f) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) ci-dessus ¹ .	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

TABLE DES MATIÈRES

VI SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS (1^{RE} PARTIE)

I	Convergences simple et uniforme	1
1	Convergence simple	1
2	Convergence uniforme	2
a	Définition	2
b	Norme infinie	2
c	Lien avec la convergence uniforme	3
3	Convergence uniforme locale	4
II	Continuité et limite	5
1	Continuité	5
2	Théorème de la double limite	6

1. Continuité, limite, intégration, dérivation des suites de fonctions.



III	Approximations uniformes	7
1	Par des polynômes	7
2	Par des fonctions en escalier	7
IV	Séries de fonctions	8
1	Convergence simple	8
2	Convergence uniforme	9
3	Convergence normale	11
4	Continuité	12
5	Double limite	12

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, X une partie non vide \mathbb{R} .

I CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

1 Convergence simple

Définition : Convergence simple

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^X .
 On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur X vers f** lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.
 On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$.

Remarque

C'est-à-dire $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Exemples

E1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \frac{n+x}{1+nx}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

On remarque que les f_n sont bornées mais pas f .

E2 – $g_n : x \in [0, 1] \rightarrow x^n$ converge simplement vers $g = \mathbb{1}_{\{1\}}$.

On remarque que les g_n sont continues mais pas g .

E3 – On considère pour $n \geq 2$, h_n affine par morceaux telle que $h_n(0) = 0$, $h_n(\frac{1}{n}) = n$ et $h_n(x) = 0$ si $\frac{2}{n} \leq x \leq 1$.

La courbe a une forme de triangle afin de remarquer que $\int_0^1 h_n(t) dt = 1$.

Alors $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} 0$ et on remarque que $\int_0^1 h_n(t) dt \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 0 dt = 0$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition : Convergence uniforme

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^X .
 On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x . Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$.

Remarque

Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.

Propriété

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Démonstration

Si on a un N qui convient pour tous les x , alors pour tout x , on a un N qui convient. \square

Propriété

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \rightarrow 0$, alors (f_n) converge uniformément vers f .

Propriété

Si les f_n sont bornées et si elles convergent uniformément vers f , alors f est bornée.

Démonstration

Avec $\varepsilon = 1$, on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall x \in X$, $|f(x) - f_N(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| \leq 1$.
En particulier, pour tout $x \in X$, $|f(x)| \leq |f_N(x)| + 1$. \square

b**Norme infinie****Définition : Norme**

On appelle **norme** sur un espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Propriété

Il s'agit d'une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Remarque

La preuve est à savoir faire, en particulier l'homogénéité.

c**Lien avec la convergence uniforme****Propriété**

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^X . $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$ si et seulement si les à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Remarque

Mais rien n'indique que les f_n soient bornées a priori. Par exemple, $f_n : x \mapsto e^x + \frac{1}{n}$ converge uniformément vers \exp et aucune de ces fonctions n'est bornée.



Propriété

Si les fonctions $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ sont bornées et $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Démonstration

C'est bien la même définition. □

Propriété

Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$, alors la convergence n'est pas uniforme.

Démonstration

Si la convergence est uniforme, alors les $f_n - f$ sont bornées et $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Or $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. □



Méthode : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
 - ★ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.
 - ★ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \rightarrow 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
 - ★ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f .
 - ★ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$.

Exemples

- E1 – On reprend les mêmes exemples. Pour le premier, il n'y a pas convergence uniforme car f n'est pas bornée alors que les f_n le sont.
- E2 – $g_n : x \mapsto g^n$. Alors $\|g_n - g\|_\infty = 1$ ou bien $g_n(1 - 1/n) - g(1 - 1/n) \rightarrow e \neq 0$. Il n'y a pas convergence uniforme.
- E3 – $h_n(1/n) - h(1/n) = n \not\rightarrow 0$.

Exercices

Ex 1 – CCINP 11

1. Soit X une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{R} convergeant simplement vers une fonction f .
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
 - (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Ex 2 – CCINP 13

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{C} , X désignant un ensemble non vide quelconque.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g .
Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} .
La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Remarques

R1 – Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I , $x_0 \in \bar{X}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X , elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X , mais, malheureusement, la réciproque est fautive.

R2 – Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers f au voisinage de $+\infty$** lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , soit, de manière équivalente, s'il existe $a > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Propriété

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X , alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X .

Remarque

La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X , ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X .

De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

Exemple

$g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0, 1[$, mais pas sur $[0, 1[$ comme déjà vu.

II CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

Théorème : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I , $x_0 \in I$. On suppose que

H1 Pour tout n , f_n est continue en x_0 .

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 .

Alors

C1 f est continue en x_0 .

Démonstration

Soit $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[= V$.

Alors, si $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f au voisinage de a fournit un rang N à partir duquel, pour tout $x \in V$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. C'est donc le cas pour $x = x_0$.

En prenant $n = N$, la continuité de f_N , fournit un $\delta > 0$ tel que sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi, si $|x - x_0| \leq \min(\eta, \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Cela prouve bien que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$. □

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I . On suppose que

H1 Pour tout n , f_n est continue sur I .

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).



Alors

C1 f est continue sur I .



Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f .

Exemples

E1 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

E2 – CCINP 9 :

- Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{C} et g une fonction de X dans \mathbb{C} .
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .

2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{nx})$.

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
- La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
- Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
- La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Solution :

- Cours.
- Limite simple : $\mathbb{1}_{\{0\}}$.
 - Continuité.
 - Oui.
 - Non : $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \not\rightarrow 0$.

2 Théorème de la double limite

Théorème : de la double limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à K^I , $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a .

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$

C2 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$.

Remarque

⚠ Lorsque a est une borne ouvert de I , une convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas !

Démonstration

Non exigible. On traite le cas où a est fini.

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$.

On suppose dorénavant que $n \geq N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leq 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leq 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a , elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a .

On obtient donc, pour $n \geq N$, $|b_n| \leq 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \rightarrow b$.

On montre alors que $b_n \rightarrow b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| + |f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}| + |b_{\varphi(n)} - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N , $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a alors aussi $|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W'_n et W''_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ et $|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $|b_{\varphi(n)} - b| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geq \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W'_n \cap W''_n$, alors tire $|b_n - b| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \rightarrow b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \rightarrow b$), qui est aussi continue en a , donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$. \square



Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ alors que ces limites existent.

Remarque

La convergence sur tout segment ne suffit pas si $a \notin I$ (mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a .)

Exemple

$g_n : x \mapsto x^n$ en $a = 1$: le résultat ne tient pas malgré la convergence uniforme sur tout segment.

III APPROXIMATIONS UNIFORMES

1 Par des polynômes

Théorème : de Weierstraß

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Énoncé équivalent : Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Il existe une suite fonction $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $\|p_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Énoncé équivalent : Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|p - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Démonstration

Non exigible. Preuve classique par les polynômes de Bernstein en TD. \square

Remarque

Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

**Exercice**

Montre qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

Solution : En effet, commençons par remarquer qu'il est inutile de prendre une borne infinie car si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante.

On confond le polynôme et la fonction polynomiale associée.

Supposons alors qu'une fonction f est limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}[X])^{\mathbb{N}}$ sur un intervalle non borné I . On a un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $P_n - f$ est bornée et $\|P_n - f\|_{\infty} \leq 1$. Mais alors, si $n \geq N$, par inégalité triangulaire, $\|P_n - P_N\|_{\infty} \leq \|P_n - f\|_{\infty} + \|f - P_N\|_{\infty} \leq 2$ donc $P_n - P_N$ bornée sur I qui ne l'est pas, donc constant. On a donc $c_n \in \mathbb{K}$ tel que $P_n = P_N + c_n = P_N - P_N(a) + P_N(a)$ où a est un point quelconque de I .

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout $x \in I$, $f(x) = P_N(x) - P_N(a) + f(a)$ donc f est une fonction polynomiale.

2 Par des fonctions en escalier

Théorème

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Remarque

On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ telle que $\|\varphi - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Alors, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on obtient φ_n telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f .

Démonstration

Cas continu Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ de pas $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \eta$.

On définit alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, on a k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$ et $|x - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| \leq \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon$, soit $x = b$ et $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Cas continu par morceaux Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ adaptée à f .

Chaque $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$: on a $\varphi_k \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que $\|f_k - \varphi_k\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$ soit on a k tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{K}^X

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** sur X si pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge. Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarques

R1 – Ainsi, la **serie** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans

$$\text{ce cas, } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

R2 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fautive.

Exemple

Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$ puis $f_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$ puis $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$

2 Convergence uniforme

Définition : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X , c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ tel que

- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur X ,
- $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque

On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonction comme convergence uniforme locale de (S_n) .

Propriété

- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f , alors elle converge simplement vers f .
- Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que $\alpha_n \rightarrow 0$ et $\forall x \in X$, $|S_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f .

Démonstration

Héritée des suites de fonctions. □

Propriété

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X , R_n le reste d'ordre n .

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.



Démonstration

Conséquence immédiate de la définition. □

Exercice : CCINP 8

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

- Étudier la convergence simple sur \mathbb{R} de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Corrigé :

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x \geq 0$, alors $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

Donc d'après 1.(a), $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 |f_n(x)| = n e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on peut poser $\forall x \in [0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Alors, comme, $\forall x \in [0, +\infty[, (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

Et donc $\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

C'est-à-dire $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Propriété

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X , alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X , c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Démonstration

$(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 donc $(f_n) = (R_n - R_{n-1})_n$ aussi car $|f_n(x)| \leq \|R_n - R_{n-1}\|_\infty \leq \|R_n\|_\infty - \|R_{n-1}\|_\infty \rightarrow 0$ avec une majoration indépendante de x . □



Méthode : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(a_n) \not\rightarrow 0$.

Exercice : CCINP 17

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

- Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
- $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

Corrigé :

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $x = 0, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty, f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.

On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0; +\infty[$.

Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée.

De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

En effet, si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t)|$; donc $\sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t)| \geq e^{-1}$.

Ainsi, $\sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t)| \not\rightarrow 0$.

On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0; +\infty[$.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.



Méthode : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f . Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

Fonction ζ sur $]1, +\infty[$: $R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ par comparaison à une intégrale. Convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 1$.

3 Convergence normale

Définition : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Propriété : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X ,

- elle converge uniformément,
- pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Démonstration

- $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \rightarrow 0$.

- Pour tout $x \in I, |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$. □



Remarques

R1 – On a le diagramme



Les réciproques sont fausses.

R2 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemples

- E1 – Pour la fonction ζ , il n'y a pas convergence normale sur $]1, +\infty[$, mais sur tout $[a, +\infty[$.
On retrouve la convergence uniforme.
- E2 – $\sum n^\alpha x e^{-n^2 x}$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha < 1$.
Sinon, convergence normale sur $[a, +\infty[$.



Méthode : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X , on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Propriété : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X .

Exemple

$$f_n(x) = x e^{-n^2 x^2} \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

4 Continuité

Théorème : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I . On suppose que

- H1 Pour tout n , f_n est continue sur I .
- H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Exemple

ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

5 Double limite**Théorème : de la double limite**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I , $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a .

H2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

Alors

C1 $\sum b_n$ converge.

C2 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Remarque

⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I , une convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas !

Exemples

E1 – ζ en $+\infty$ tend vers 1.

E2 – $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$: convergence simple, continuité sur \mathbb{R}_+^* . Pas de convergence normale sur \mathbb{R}_+^* . Limite en $+\infty$.

Exercice : CCINP 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

(c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur \mathbb{R}^* .

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Corrigé

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4x^3}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant,

$\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

• Prouvons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

$\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq \frac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).



De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

• Prouvons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

$\forall x \in [a, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{x}{n^4 x^4} = \frac{1}{n^4 x^3} \leq \frac{1}{n^4 a^3}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0, 1]$, donc f_n est bornée sur $[0, 1]$.

De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et que $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Autre méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f'_n(x) = \frac{1 - 3n^4 x^4}{(1 + n^4 x^4)^2}$.

On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}} n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}} n}, +\infty\right[$.
 f_n étant positive sur \mathbb{R} , on en déduit que f_n est bornée.

Donc $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ existe et $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}} n}\right) = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$. (1)

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. (2)

Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $] -\infty, 0[$.

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R}^* .

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^4 x^3}$.

D'après 1.(b), $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.

Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exemple : Contre-exemple en 0 sur tout segment

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

1. Convergence simple, calcul de f .
2. Convergence normale sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .
3. Problème de double-limite en 0^+ .

**Méthode : Pour montrer une absence de convergence uniforme...**

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a .