CHAPITRE IV

Espaces vectoriels (MPSI)

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

1 Définition

Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$$

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E,+,\cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté $\vec{0}$ ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x}\in E,\quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\quad \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x}\in E,\quad (\lambda\times\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x}).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall\,\vec{x}\in E,\quad 1_{\mathbb{K}}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

Définition : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\lambda_i\neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathscr{F}=(\vec{x}_i)_{i\in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété : Produit cartésien

Si $\left(E,\underset{E}{+},\underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F,\underset{F}{+},\underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E\times F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(\vec{x},\vec{y}),(\vec{x}',\vec{y}')\in E\times F$,

$$(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x}',\vec{y}')=\left(\vec{x}\underset{E}{+}\vec{x}',\vec{y}\underset{F}{+}\vec{y}'\right)$$

$$\lambda\cdot(\vec{x},\vec{y})=\left(\lambda\underset{E}{\cdot}\vec{x},\lambda\underset{F}{\cdot}\vec{y}\right)$$

Propriété : Fonctions

Si X est un ensemble non vide et $\left(F,\underset{F}{+},\underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(F^X,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $f,g\in F^X$, alors

$$f+g:x\mapsto f(x)\underset{F}{+}g(x)$$

$$\lambda\cdot f:x\mapsto \lambda\underset{F}{\cdot}f(x)$$

Propriété : Ev classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K},+,\times)$,
- $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ *pour tout $n\in\mathbb{N}$*,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$,
- $(\mathbb{K}^D,+,\cdot)$ *pour tout ensemble D*,
- $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X),+,\cdot)$.

$(\mathbb{C},+,\times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, alors $(\mathbb{L},+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Sous-espace vectoriel

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.

On dit que $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\left(F,+_{|F^2},\cdot_{|\mathbb{K}\times F}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété : Caractérisation

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\iff \begin{cases} F\neq\varnothing\ (0_E\in F) \\ \forall\,\vec{x},\vec{y}\in F,\quad \vec{x}+\vec{y}\in F \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x}\in F,\quad \lambda\vec{x}\in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F\neq\varnothing\ (0_E\in F) \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x},\vec{y}\in F,\quad \vec{x}+\lambda\vec{y}\in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition : Sev engendré

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

On le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} A$.

Si $F = \operatorname{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Propriété : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$. $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\operatorname{Vect} A = \{\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n\ ;\ n\in\mathbb{N}^*, \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\in A, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\}.$$

5 Familles de vecteurs

Définition : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{F}=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :
$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\ \sum_{i=1}^n \lambda_i\vec{x}_i=\vec{0}$$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$,
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\vec{x}_i=\vec{0}\Longrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=0.$$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :
$$\forall\vec{x}\in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \vec{x}=\sum_{i=1}^n\lambda_i\vec{x}_i$$
c'est-à-dire $E=\operatorname{Vect}\mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Méthode : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

Méthode : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Propriété

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Définition - Propriété : Coordonnées

$\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall\vec{x}\in E,\ \exists!(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n \mid \vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$. Le triplet $(x_1,\dots,x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Cette définition s'étend au cas où $\mathscr{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Définition - Propriété : Bases canonique

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_n,p(\mathbb{K})$ les familles

- $((0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k^e}}{1},0,\dots,0))_{1\leqslant k\leqslant n}$,
- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$,
- $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.

Propriété

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y} \in E$.

- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y})$ *libre* $\Longleftrightarrow \begin{cases} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ libre} \\ y \notin \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \end{cases}$
- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *liée si et seulement s'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\vec{x}_{i_0} \in \mathrm{Vect}\big((\vec{x}_i)_{i \neq i_0}\big)$.*
  Lorsque c'est le cas, on a alors
  $$\mathrm{Vect}\,(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \mathrm{Vect}\,(\vec{x}_i)_{i \neq i_0}.$$

6 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition : Sommes de sev

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n \mid \forall\, i,\ \ \vec{x}_i \in F_i\}.$$

Ainsi,

$$\vec{x} \in \sum_{i=1}^{n} F_i \Longleftrightarrow \exists\,(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ \ \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n.$$

Propriétés

(i) *Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

(ii) *Si A, B sont des parties de E, alors*
$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}\,A + \mathrm{Vect}\,B.$$

7 Somme directe

Définition : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en **somme directe** lorsque pour tout $\vec{x} \in F_1 + \cdots + F_n$, l'écriture $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ où $\forall\, i,\ \ \vec{x}_i \in F_i$ est unique.

On note alors $F_1 + \cdots + F_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Propriété : Caractérisation

$F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall\, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$,
$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_n = \vec{0}.$$

Propriété : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

8 Sous-espaces supplémentaires

Définition

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall\, \vec{x} \in E,\ \ \exists!\, (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G \mid \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G.$$

Propriété

(i) *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

(ii) *Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.*

Méthode : Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a + b$, alors... $a = \dots$ et $b = \dots$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ (en général plus facile) et $F + G = E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{0_E\}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^{\perp} = E$.

Définition

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires dans E lorsque $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$ c'est-à-dire

$$\forall\, \vec{x} \in E,\ \ \exists!\, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \mid \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n.$$

II DIMENSION FINIE

1 Espace de dimension finie

Définition : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$.
- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Définition : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim E = 0$.
Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.
*$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.*

Théorème : de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Théorème : de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.
De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Corollaire

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$.
Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et $\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$.
Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.
*L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E.*

Définition : Droites, plans, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E, un sous-espace de codimension 1, donc de dimension $n-1$ est un **hyperplan** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.
On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg}\mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F})$.

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.
(i) Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}$.
(ii) Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de dimension finie, $\mathscr{B}_{F_i}$ une base de F_i, $\mathscr{C}$ la famille obtenue en mettant bout à bout les $\mathscr{B}_{F_i}$ (concaténation).
On a toujours que $\mathscr{C}$ engendre $H = F_1 + \cdots + F_n$, et les F_i sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre donc une base de H.
On dit alors que la base $\mathscr{C}$ de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.
On a alors $\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Corollaire

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de E.

$F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \cdots + F_n$.
2. *La somme est directe.*
3. $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Corollaire

Tout sous-espaces vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p, c'est-à-dire de dimension $n - p$.

7 Formule de Grassmann

Propriété : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

III Applications linéaires

1 Généralités

a Définition

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.

On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad u\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + u(\vec{v}) \\ \forall\, \vec{x} \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u\left(\vec{x} + \lambda \vec{y}\right) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{v}).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Définition : Morphisme d'algèbre

Soit $(\mathscr{A}, +, \times, \cdot)$, $(\mathscr{B}, +, \times, \cdot)$ et $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.
On dit que f est un **morphisme d'algèbres** lorsque

- f est linéaire,
- $\forall\, x, y \in \mathscr{A}, \quad f(x \times y) = f(x) \times f(y)$
- $f(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$.

b Propriétés

Propriétés

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $u\left(\vec{0}_E\right) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall\, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E, \quad \forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i).$$

(iii) *Si A est une partie de E, $u(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect}(u(A))$.*

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.*

(vi) *$(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.*

(viii) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

c Noyau et image

Définition : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Le **noyau** de u est

$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}\left(\{\vec{0}_F\}\right) = \left\{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\right\} \in \mathscr{P}(E).$$

- L'**image** de u est

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \left\{u(\vec{x}) \;;\; \vec{x} \in E\right\} \in \mathscr{P}(F).$$

Propriétés

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.

(ii) u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(iii) u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Ker}\left(u_{|E'}\right) = E' \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}\left(u_{|E'}\right) = u(E')$.

d Rang

Propriété

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E ou F de dimension finie. Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Propriété

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geqslant 2$.

Notation

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.

Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application
$$\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}\right.$$
est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

⚠ *En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

Propriété : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété

$(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

c Projecteurs

Définition : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application
$$p : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F \end{array}\right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.

On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriétés

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathscr{L}(E)$
- $p + q = \mathrm{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Propriété : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in (E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.

Dans ce cas,

(i) $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$

(ii) p est la projection sur
$$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$$
parallèlement à $G = \operatorname{Ker} p$

Méthode : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

d Symétries

Définition : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur** F **parallèlement à** G l'application $s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriétés

(i) $s \in \mathscr{L}(E)$

(ii) *Si* p *projection sur* F *parallèlement à* G, $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Propriété : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in (E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la projection sur $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Méthode : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p + \mathrm{id}_E)$.

e Affinités

Définition : Affinité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **affinité de base** F **de direction** G **et de rapport** $k \in \mathbb{K}$ l'application $f_k : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F + k\vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $f_k = p + kq$ avec les notations précédentes.

Propriété : Caractérisation

f est une affinité si et seulement si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $f = \mathrm{id}_E$ ou bien on a $k \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E) = E$.

Il s'agit alors de l'affinité de base $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, de direction $\mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E)$ et de rapport k.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^e coordonnée).

Propriété

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = \left(\vec{f}_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in I,\ \ u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$.

Corollaire

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = v(\mathscr{B})$.

Propriété

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

b Applications linéaires et dimensions

Propriété

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Propriété

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Propriété

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) *u isomorphisme*

(ii) *u est inversible à gauche*

(iii) *u est inversible à droite*

(iv) $\mathrm{rg}\, u = n$

c Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim\mathscr{L}(E,F)=\dim E\times\dim F$.

d Décomposition d'applications linéaires

Théorème

Si $E=\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$ et pour tout i, $u_i\in\mathscr{L}(E_i,F)$, alors il existe une unique application linéaire $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout i, $u_{|E_i}=u_i$.

4 Théorème du rang

Théorème : du rang

$u\in\mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker}u$ sur $\operatorname{Im}u$.

Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E=\dim\operatorname{Ker}u+\operatorname{rg}u$.

Corollaire

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg}u=\dim E$.

Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}u=\dim F$.

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Définition

On rappelle que les formes linéaires sont les $\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que $E^*=\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé espace dual de E.

Théorème : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) H est un hyperplan.

(ii) H est un supplémentaire de toute droite $D\not\subset H$.

(iii) H est un supplémentaire d'une droite $D\not\subset H$.

(iv) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists\varphi\in E^*\setminus\{0_{E^*}\},\quad H=\operatorname{Ker}\varphi$.

Corollaire

Soient $\varphi_1,\varphi_2\in E^*\setminus\{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker}\varphi_1=\operatorname{Ker}\varphi_2\iff\exists\lambda\in\mathbb{K}^*,\quad\varphi_1=\lambda\varphi_2.$$

Propriété : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E=n$ et $\dim F=p$ tels que $p<n$, alors F est l'intersection de $n-p$ hyperplans distincts.

IV SOLUTIONS DES PROBLÈMES LINÉAIRES

Définition : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x)=b$ où $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $b\in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b\notin\operatorname{Im}u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker}u$, donc de la forme*

$$x_0+\operatorname{Ker}u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker}u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x)=0_F$.