CHAPITRE I

Suites numériques (MPSI)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}\right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

I Cas des suites réelles

1 Limites

Définition : Limite

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

ou de manière équivalente

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

On note alors $u_n \to +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \to +\infty$ soit

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$

ou de manière équivalente

$$\forall B \leqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$

On note alors $u_n \to -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.*

Propriété

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors
- *Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.*
- *Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.*

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- *$v \to \ell$*
- *$w \to \ell$*
- *apcr $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- *$v \to +\infty$*
- *apcr $u_n \geqslant v_n$*

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- *$w \to -\infty$*
- *apcr $u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to -\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda\ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

Propriété

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,
- *$u + v \to \ell_1 + \ell_2$*
- *$uv \to \ell_1\ell_2$*

Propriété

- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$*
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.*
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$.*

Propriété : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.
- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.*
- *Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

II Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).

De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si
- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

III Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \ x \leqslant \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ \ a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \ x \geqslant \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ \ a_n \to \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV Extension aux suites complexes

Notation

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$z_n \to \ell \Longleftrightarrow \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell \text{ et } \mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$$

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.
- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.*
- *Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.*

V Suites récurrentes

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \to \mathbb{R}$.

Propriété

Si $u_n \to \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Méthode

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous !
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** $f : I$ tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall\, n \geqslant n_0,\quad u_n \in I$.
  Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}.)$$
  - ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

2 Cas d'une fonction contractante

Définition

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a,b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall\, x, x' \in [a,b],\quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».

Méthode

Cela est interessant si $I = [a,b]$ est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell \in [a,b]$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in [a,b]$ stable par f, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n \in [a,b]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = \left|f(u_{n-1}) - f(\ell)\right| \leqslant k\,|u_{n-1} - \ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \to 0$$

Donc directement $u_n \to \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 *On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in \mathring{I},\quad \left|f'(t)\right| \leqslant k$.*

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall\, x, x' \in [a,b],\quad \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|.$$

VI Relations de comparaison

1 Définition

Définition

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathcal{O}(v)$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.

Propriété : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll n^2$.

Propriété

$$u \sim v \iff u = v + \mathrm{o}(v)$$

2 Propriétés

Propriété : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\alpha \neq 0$, $u = \mathrm{o}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathcal{O}(\alpha v) \Longrightarrow u = \mathcal{O}(v)$.

(ii) $u = \mathrm{o}(1) \Longleftrightarrow u \to 0$ et $u = \mathcal{O}(1) \Longleftrightarrow u$ bornée.

(iii) Si $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathcal{O}(v)$ et la réciproque est fausse.

(iv) **Transitivité**

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \Longrightarrow u = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \Longrightarrow u = \mathcal{O}(w)$$

(v) **Combinaison linéaire**

$$u = \mathrm{o}(w) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathcal{O}(w) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathcal{O}(w)$$

(vi) **Produit**

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } a = \mathrm{o}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{o}(vb)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } a = \mathcal{O}(b) \Longrightarrow ua = \mathcal{O}(vb)$$

Propriété : Propriétés de ~

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne sannulant pas à partir d'un certain rang.

(i) $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.

(iii) $u \to \ell \ \boxed{\neq 0} \Longleftrightarrow u \sim \ell$.

(iv) Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

(v) Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\dfrac{u}{a} \sim \dfrac{v}{b}$.

(vi) Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.

(vii) Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

3 Équivalents usuels

Propriété : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Propriété : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \to 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\dfrac{h_n^2}{2}$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $\mathrm{e}^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\mathrm{Arctan}\, h_n \sim h_n$
- $\mathrm{Arcsin}\, h_n \sim h_n$
- $\mathrm{sh}\, h_n \sim h_n$
- $\mathrm{th}\, h_n \sim h_n$

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(r)} + \mathrm{o}\left(v_n^{(r)}\right)$$

où $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \cdots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall\, k \in [\![1, r-1]\!]$, $v_n^{(k+1)} = \mathrm{o}\left(v_n^{(k)}\right)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision $v_n^{(r)}$.**

Méthode

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + \mathrm{o}(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

VII Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Propriété

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $\mathbb{K}$) de suite extraite de u.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

VIII EXERCICES CCINP