Corrigé du TD : Transformations d'Abel

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes réels ou complexes, (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes réels. Démontrer :
$$\sum_{n=0}^{p} v_n u_n \;=\; v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n \quad .$$

La méthode la plus efficace est peut-être la récurrence. Mais on ne fait qu'une vérification, on ne voit pas comment la formule « apparaît ». On peut aussi (sans faire de récurrence) partir du membre de droite pour essayer de parvenir au membre de gauche, ce qui est raisonnable, car il est plus naturel de partir de l'expression la plus compliquée pour la ramener à l'expression la plus simple. Les calculs sont les suivants et se résument par : on coupe en deux, on réindexe une des sommes, on les rassemble. Notons qu'on fait une réindexation sans changer le nom de l'indice, ce qui n'est pas particulièrement recommandé (risques d'erreur accrus) sauf dans des cas particulièrement simples comme ici.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n &= \sum_{n=0}^{p-1} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p-1} v_{n+1} S_n \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} v_n S_n - \sum_{n=1}^{p} v_n S_{n-1} \\
&= v_0 S_0 - v_p S_{p-1} + \sum_{n=1}^{p-1} v_n (S_n - S_{n-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{p-1} v_n u_n - v_p S_{p-1} \\
&= \sum_{n=0}^{p} v_n u_n - v_p S_p
\end{aligned}$$

La troisième méthode est de partir du membre de gauche, en remarquant que la manière naturelle de faire intervenir les S_n est d'écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$ (quitte à poser $S_{-1} = 0$ pour que ce soit valable si $n = 0$). On écrit donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p} u_n v_n &= \sum_{n=0}^{p}(S_n - S_{n-1})v_n \\
&= \sum_{n=0}^{p} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p} v_n S_{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{p} v_n S_n - \sum_{n=1}^{p} v_n S_{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{p} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p-1} v_{n+1} S_n \\
&= v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1}(v_n - v_{n+1})S_n
\end{aligned}$$

Ce n'est pas la méthode la plus simple, mais on voit comment on « trouve » la formule.

---

2. On reprend les notations de la question précédente. Démontrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée et la suite (v_n) à termes positifs, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Soit M tel que, pour tout n, $|S_n| \leq M$. Alors, pour tout n,

$$|(v_n - v_{n+1})S_n| \leq (v_n - v_{n+1})M$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (série télescopique associée à une suite convergente). Donc $\sum (v_n - v_{n+1})S_n$, absolument convergente, converge. De plus, la suite $(v_p S_{p-1})$ converge (vers 0) comme produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0.

---

3. Retrouver le théorème sur les séries alternées en utilisant le résultat précédent.

Prenant $u_n = (-1)^n$, les sommes partielles de la série (divergente) $\sum u_n$ sont bornées. Si on veut être plus précis, on a $S_n = 1$ si n est pair, $S_n = 0$ si n est impair, donc bien évidemment la suite (S_n) est bornée.

---

4. Etudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

(on pourra utiliser pour certaines valeurs de θ et α le résultat de la deuxième question).

Si $\alpha \leq 0$, il y a divergence grossière.

Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue (Riemann).

Les cas où il n'y a ni convergence absolue ni divergence grossière sont les cas $0 < \alpha \leq 1$. On pose alors $u_n = e^{in\theta}$; si la suite (S_n) est bornée, on pourra conclure à la convergence par le résultat précédent. Or, si $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\ &= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbf{N} \quad |S_n| \leq \dfrac{2}{|1-e^{i\theta}|}$. Donc la suite (S_n) est bornée.

Si $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$, le terme général de la série est $1/n^\alpha$, on retombe sur une série de Riemann divergente dans le cas $0 < \alpha \leq 1$.

Finalement la série converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z})$.

---

5. On se place de nouveau sous les hypothèses de la deuxième question. On définit

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k$$

Si M est tel que $\forall n \in \mathbf{N} \quad |S_n| \leq M$, trouver un majorant de $|R_n|$ en fonction de M et d'un terme de la suite v.

Attention à ne pas écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (S_k - S_{k-1}) v_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k v_k - \sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} S_k \end{aligned}$$

car à la deuxième ligne du calcul on sépare une somme de série convergente en deux « sommes » de séries non a priori convergentes, donc en deux termes qui n'existent pas. On résout cette difficulté en travaillant d'abord sur les sommes partielles avant de prendre les limites.

De

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} v_{k+1} S_k \\
&= S_{n+p} v_{n+p} - v_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) S_k
\end{aligned}$$

on déduit, en prenant la limite quand $p \to +\infty$,

$$R_n = -v_{n+1} S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) S_k$$

et donc

$$|R_n| \leq M \left(v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \right) = 2M v_{n+1}$$