

SÉRIES NUMÉRIQUES

- Ne jamais parler de la somme d'une série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré la convergence de la série.
- En général, pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$, c'est à la suite u_n que l'on s'intéresse, rarement aux sommes partielles.
- La première des choses à faire est de vérifier si le terme général est de signe constant. Si ce n'est pas le cas, on peut essayer de montrer l'absolue convergence qui implique la convergence.
- On peut utiliser des o ou O : pour des termes généraux réels positifs a priori, mais $u_n = o(\dots)$ et $\|u_n\| = o(\dots)$ signifiant la même chose, c'est une technique de démonstration d'absolue convergence.
- Avec un équivalent : attention, cette fois-ci il faut **absolument** que les termes soient réels positifs (ou en tout cas de signe constant) à partir d'un certain rang.
- Pour les séries à termes de signe non constant et non absolument convergentes, on peut utiliser le théorème sur les séries alternées, en vérifiant **toutes** les hypothèses de celui-ci (un $(-1)^n$ ne suffit pas !). Si ce n'est pas possible, il reste la solution du développement asymptotique.
- La comparaison à une intégrale (surtout pour les termes généraux réels positifs) peut servir (parfois) à conclure sur la convergence, trouver des équivalents de sommes partielles, de restes, etc.
- Enfin, pour le calcul de sommes d'une séries, les techniques les plus courantes sont de faire apparaître des sommes télescopiques (parfois via une décomposition en éléments simples), ou se ramener à une somme connue : géométrique, exponentielle (vous aurez un catalogue intéressant dans le chapitre sur les séries entières).
- Attention sur la manipulation des sommes de séries : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ peut exister alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas définies... Y réfléchir à deux fois avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Séries à termes de signe constant

1 Déterminer la nature des séries de terme général

- $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
- $v_n = \frac{\text{ch } n}{\text{ch } 2n}$
- $w_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $x_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- $y_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$
- $z_n = \frac{n^n}{(2n)!}$
- $s_n = \sin(2 \text{Arctan } n)$

2 Nature de $\sum \left| \ln \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right|^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. **3** Nature de $\sum \text{Arccos} \left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha} \right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

4 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Montrer que $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont aussi convergentes.

5 1. Montrer que $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$ converge.

2. Montrer que pour tout n , $(2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$.
3. Quelle est la nature de $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$?

6 Nature de $\sum a^{ln n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$. **7** Convergence de la suite de terme général $\prod_{k=2}^n (2 - e^{1/k})$.

8 **Règle de Raabe-Duhamel** Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \ln(n^\alpha x_n)$.

1. Démontrer que la série $\sum (y_{n+1} - y_n)$ converge.

2. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

3. En déduire que la série $\sum x_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$. Pour

tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

(a) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.

(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a - b + 1)S_n = (n + a)u_n + (1 - b)u_0$.

(c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque $b - a > 1$.

9 CCINP 5 et 6 : Série de Bertrand particulière et critère de D'Alembert

Séries à termes quelconques

10 Déterminer la nature des séries de terme général

- $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
- $v_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$
- $w_n = \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$
- $x_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$
- $y_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
- $z_n = \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{n} \right)$

11 Convergence de $\sum \left(\exp \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) - 1 \right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

12 Soit $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $P_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.

13 Nature et somme éventuelle de $\sum (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

14 CCINP 7; 8 et 46 : **terme généraux équivalents et séries alternées**

15 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

- Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
- Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

16 **Transformation d'Abel** Il s'agit de l'analogie discret de l'intégration par parties.

- Soit u une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^p v_n u_n = v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} (v_n - v_{n+1}) S_n.$$

- Montrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée, la suite (v_n) décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
- Le théorème sur les séries alternées peut-il être considéré comme un cas particulier de ce résultat ?
- Étudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
- Obtenir, en revenant sous les hypothèses du 2, une majoration du reste.

Calcul de sommes

17 Justifier leur bonne définition et calculer les sommes

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

18 Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

19 Convergence et somme de **20** Convergence et somme de $\sum \frac{\sin n\alpha}{2^n}$.

$$\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

On pourra utiliser que $\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}$.

Comparaison avec des intégrales

21 Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$. **22** Déterminer un équivalent de $\ln n!$.

23 Démontrer que si $|x| < 1$, la série $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Par comparaison à une intégrale, montrer que si l'on note $f(x)$ sa somme, $f(x) \sim \frac{\ln 2}{x-1-1-x}$.

24 Soit $\alpha > 1$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation des relations de comparaison

25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

- Déterminer un équivalent simple de R_n .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_n - v_n$. Démontrer que $w_n \sim \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
- Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

26 Soit u suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

- Étudier la convergence de u et déterminer sa limite.
- Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n .

27 **Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).
- Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$ puis de t_n .
- Raisonner de même pour montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- En s'inspirant de ce qui précède et en posant $u_n = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}\right)$, montrer que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$