Suites (révisions)

1

Si A et B sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, étudier les bornes supérieures de $A \cup B$, $A+B$ et λA pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

2

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lorsqu'il y a une limite finie ℓ, donner un équivalent de $u_n - \ell$.

3

Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

4

Soit u une suite telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Prouver que u converge.

5 Théorème de Cesáro - lemme de l'escalier

1. Prouver le théorème de Cesáro : si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{C}$, alors $v_n = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} \longrightarrow \ell$, et le résultat est toujours valable si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell = \pm\infty$. La réciproque est-elle vrai ?
2. En déduire le lemme de l'escalier : si $u_{n+1} - u_n \longrightarrow \ell$ alors $\dfrac{u_n}{n} \longrightarrow \ell$.
3. Montrer que si $u \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.
4. Déterminer les limites des suites de terme général $\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$; $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; $\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$; $\dfrac{\sqrt[n]{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}}{n}$; $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

6 Irrationalité de e

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Montrer que les deux suites convergent vers une même limite : on admettra qu'elle vaut e. En déduire que e est irrationnel.

On pourra remarquer que si $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, $u_q < \mathrm{e} < v_q$...

7 Moyennes et suites de Schwob

1. Les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs a, b sont respectivement $\frac{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$. Montrer que ces nombres sont ainsi rangés dans l'ordre croissant.
2. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On définit les suites u et v par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.
   Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. On ne peut pas l'exprimer simplement avec les fonctions usuelles.

3. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On définit les suites u et v par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2}{\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\right)}$.
   Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on déterminera.

Solution de 7 : Moyennes et suites de Schwob

1. Ne pose pas de réelle difficulté.
2. On a envie de montrer que les suites sont adjacentes, mais on se casse vite les dents sur le fait que la différence tend vers 0. L'idée est de reprendre le principe de la convergence dans ce cas, sans montrer directement qu'elles sont adjacentes.
   On arrive facilement à montrer que pour tout $n \geqslant 1$ $v_n \leqslant u_n$, puis que $(un)_{n\geqslant 1}$ décroît et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ croît.
   Mais on a aussi que $(un)_{n\geqslant 1}$ est minorée par v_1 et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par u_1.
   Les deux suites sont donc convergente, et en passant à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$, on obtient que les deux limites sont égales.
3. Comme dans la question précédente, on montre que pour tout $n \geqslant 1$ $v_n \leqslant u_n$, puis que $(un)_{n\geqslant 1}$ décroît et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ croît, et qu'elles convergent vers une même limite avec exactement les mêmes arguments.
   Puis on remarque astucieusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$ et on en déduit que la limite commune vaut $\sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{ab}$.

8

Soit u une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.
   (a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
   (b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
   (c) Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.
2. Mêmes questions si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.

Solution de 8 :

Intercaler un q entre ℓ et 1 pour comparer à une suite géométrique.

9 CCINP 43 (suite récurrente ; équation fonctionnelle)

Solution de 9 : CCINP 43 (suite récurrente ; équation fonctionnelle)

On pose $f(x) = \operatorname{Arctan} x$.

1. (a) **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$
   Puisque la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\operatorname{Arctan}(u_1) < \operatorname{Arctan}(u$
   c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
   Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.

Troisième cas : Si $u_1 = u_0$
La suite (u_n) est constante.
Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\mathrm{Arctan}(u_0) - u_0$.
On pose alors $g(x) = \mathrm{Arctan}x - x$ et on étudie le signe de la fonction g.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) < 0$.
Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :
$\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $g(x) > 0$.
On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :
- Si $x_0 > 0$, la suite(u_n) est strictement décroissante.
- Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $x_0 < 0$, la suite(u_n) est strictement croissante.

(b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f.
Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f.
Premier cas : Si $u_0 > 0$
L'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f, on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f.
Deuxième cas : Si $u_0 < 0$
Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.
Troisième cas : Si $u_0 = 0$
La suite (u_n) est constante.

Conclusion : $\forall\, u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.
On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\mathrm{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\mathrm{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$.
Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h.
On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.
Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.
Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

Analyse asymptotique (révisions)

10 CCINP 1 (équivalents et signe)

Solution de 10 : CCINP 1 (équivalents et signe)

1. Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.

2. Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{sh}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\tan\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$.
On en déduit, d'après 1., qu'à partir d'un certain rang, u_n est négatif.

11

Classer par ordre de prédominance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux

$$(\ln n)^3, \quad \ln\left(n^3\right), \quad \frac{3^n}{n^3}, \quad 2^n, \quad \mathrm{e}^{n/2}, \quad (\ln(\ln n))^n, \quad n\ln(\ln n), \quad n\ln n.$$

12

Classer par ordre de prédominance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux

$$\frac{1}{n^4}, \quad \frac{\ln n}{n^5}, \quad \frac{2^n}{1+3^n}, \quad 2^{-\ln(\ln n)}, \quad \frac{\ln(\ln n)}{\ln n + n}, \quad \frac{\ln n}{2^n + n^2}, \quad \frac{\tan(1/n)}{1+\cos^3(1/n)}, \quad (\cos(1/n))^{\sin(1/n)} - 1.$$

13

Donner un équivalent simple de $\cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Solution de 13 :
Réponse : $(-1)^n \dfrac{\pi}{3n}$.

14

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, u_n l'unique solution de $\tan x = x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

1. Montrer que u_n est bien défini.
2. Étudier la monotonie et la limite de (u_n).
3. Trouver un équivalent de u_n.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n en exprimant $v_n = u_n - n\pi$ à l'aide d'une arctangente.

5. Donner un développement asymptotique à 4 termes de u_n en réutilisant v_n.

15 Déterminer un équivalent en $\frac{\pi}{4}$ de $\left(\tan 2x + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Solution de 15 :

Xcas : `series((tan(2*x)+tan(x+pi/4))*sin(x-pi/4)^2, x=pi/4, 1).`
Réponse : $-3\frac{x-\pi/4}{2}+(x-\pi/4)^2\cdot order\_size(x-\pi/4)$

16 Déterminer un équivalent en 1 de Arccos.

Solution de 16 :

Utiliser sin.
Réponse : $\sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

17 Déterminer les développements limités

1. $DL_4(0)$ de $\frac{x}{e^x-1}$
2. $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\tan x}$
3. $DL_4(0)$ de $(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$
4. $DL_4(0)$ de $\ln\left(1+x+\sqrt{1+x}\right)$
5. $DL_4(0)$ de $\ln\frac{\ln(1+x)}{x}$
6. $DL_4(0)$ de $(\cos x)^{1+\sin x}$
7. $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+\tan x}$
8. $DL_5(0)$ de $\frac{x}{\sin x}$
9. $DL_6(0)$ de $\operatorname{ch} x \sin x$
10. $DL_3(1)$ de $\sqrt{x}$
11. $DL_2(0)$ de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$
12. $DL_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}\right)$

Solution de 17 :

Réponses avec xcas (qui existe aussi en appli mobile).
Par exemple, pour le premier `series(x / (exp(x) - 1), x = 0, 4)` donne

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o\left(x^4\right).$$

Pour le dernier, pas de xcas !!
Voir par exemple que $\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}=e^x-\frac{x^{1000}}{1000!}+o\left(x^{1000}\right)$ pour continuer...
Réponse : $x+\frac{x^{1000}}{1000!}+o\left(x^{1000}\right)$.

18 Déterminer un équivalent simple en 0 de

1. $\sqrt{\sin x}-\sqrt{\operatorname{sh} x}$
2. $\frac{\sin x+\operatorname{sh} x-2x}{x(\cos x+\operatorname{ch} x-2)}$
3. $\sin x+a\tan x+b\sin^3 x$ où a, b réels

Solution de 18 :

Avec xcas....

1. `series(sqrt(sin(x)) - sqrt(sinh(x)), x=0, 3)` donne :

$$-\frac{\sqrt{x}\cdot x^2}{6}+\sqrt{x}\cdot x^3\cdot order\_size(x).$$

2. Demandez à xcas.
3. Là, il faut discuter suivant les valeurs de a et de b... Attention aux équivalents à 0 !!!

19 Montrer que l'application $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x^2} \end{array}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et en donner un $DL_5(0)$.

Solution de 19 :

Méthode :

- Utiliser le théorème de Taylor-Young pour justifier que le DL existe (théorème de la bijection + non annulation de la dérivée de f assure que f^{-1} existe et a la même classe que f...)
- Puis utiliser un argument de parité pour réduire le nombre de cœfficients inconnus dans le DL.
- Enfin, $\left(f^{-1}\right)'(0)$ est facile à obtenir, ce qui donne un cœfficient gratuitement.
- Puis utiliser le fait que $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ ou bien que $f^{-1}(f(x))=x$ et une composition de DL puis l'unicité de celui-ci pour trouver les deux derniers cœfficients.

20 Déterminer le DL_6 en $+\infty$ de $\ln\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Solution de 20 :

D'après xcas : `series(ln(x*tan(1/x)), x=+infinity, 6)`

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{3}+7\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^4}{90}+\left(\frac{1}{x}\right)^6\cdot order\_size\left(\frac{1}{x}\right)$$

21 Étudier les limites

1. $\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ en 0
2. $\frac{\ln x}{x^2+x-2}$ en 1
3. $x^{\frac{1}{1-x}}$ en 1
4. $(\pi-2x)\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$
5. $\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}-e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}-e^{\cos\sqrt{x}}}$ en 0

Solution de 21 :

J'ai aussi demandé à `xcas` avec `limit`

1. $-\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{3}$
3. e^{-1}
4. 2
5. $\frac{4}{15}$