

CORRIGÉ DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 2

Problème 1 : Autour de la transformation d'Abel (CNM TSI 2002, CCINP MP 2014)

I. Transformation d'Abel

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $b_k = B_k - B_{k-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule avec la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \end{aligned}$$

donc $\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, donc $|(a_n - a_{n+1})B_n| = O(|a_n - a_{n+1}|)$.

La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ étant convergente par hypothèse, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série $\sum |(a_n - a_{n+1})B_n|$, c'est-à-dire l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série $\sum (a_n - a_{n+1})B_n$. Comme, de plus, $a_n B_n \rightarrow 0$ car $a_n \rightarrow 0$ et (B_n) bornée, la relation démontrée en 1.b montre que la série de terme général $a_n b_n$ converge.

3. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0,$$

c'est-à-dire que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.

Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées, donc la série de terme général $a_n b_n$ converge.

4. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Si l'on pose $b_n = (-1)^n$ pour tout n , alors $B_n = \sum_{k=0}^n b_k = 0$ ou

1 selon la parité de n , donc la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, la série $\sum a_n b_n$ converge.

On a donc démontré le critère spécial sur les séries alternées :

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

(Notez que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle implique $a_n \geq 0$ pour tout n !)

5. (a) On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.

Par théorème, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2} (-2i) \sin(n\theta/2)}{e^{i\theta/2} (-2i) \sin(\theta/2)}$ donc $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

(b) • Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc **convergente**.

• Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc **la série est grossièrement divergente**.

• Soit $\alpha \in]0, 1]$. On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question 3. Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.

La suite $(1/n)$ est décroissante et tend vers 0. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$

donc la suite des sommes partielles de $\sum e^{in\theta}$ est bornée. Donc **la série est (semi-)convergente**.

• Bilan : $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

1. Si x est un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$, alors, d'après la question 5.a, $C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$,
d'où en séparant partie réelle et imaginaire,

$$C_n(x) = \frac{\cos(\frac{n+1}{2}x) \sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\frac{1}{2} [\sin(\frac{-x}{2}) + \sin(\frac{2n+1}{2}x)]}{\sin(\frac{x}{2})} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

et

$$S_n(x) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x) \sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

2. On a donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$, c'est-à-dire que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Comme en I.5.b qu'on peut aussi utiliser directement en prenant la partie imaginaire avec $\alpha = 1$, en appliquant alors le résultat de la question I.3. avec $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (la valeur de a_0 importe peu) et $b_n = \sin nx$, on obtient que la série

trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ converge lorsque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Et puisqu'elle converge aussi lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ($\sin nx = 0$

pour tout n), on peut donc définir $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$, $f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}$.

Alors f_N est impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_N(-x) = -f_N(x)$ et par unicité de la limite, $f(-x) = -f(x)$ donc

f est impaire.

On montre de la même façon que, puisque les f_N sont 2π -périodiques, **il en est de même de f .**

4. Pour $x \in]0, \pi[$ on a, en utilisant un résultat de la question II.1, et puisque la fonction $t \mapsto \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$ est continue sur $]0, \pi[$

$$\int_x^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt = \int_x^\pi \frac{dt}{2} + \int_x^\pi C_n(t) dt = \frac{\pi - x}{2} + \sum_{k=1}^n \int_x^\pi \cos kt dt$$

donc $\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt.$

5. (a) Une intégration par parties (les fonctions considérées étant toutes de classe \mathcal{C}^1 sur $[x, \pi]$ pour $x \in]0, \pi[$) donne

$$\begin{aligned} \int_x^\pi \underbrace{h(t)}_{u(t)} \underbrace{\sin(n + \frac{1}{2})t}_{v'(t)} dt &= \left[\frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos((n + \frac{1}{2})t) h(t) \right]_x^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t) \cos(n + \frac{1}{2})t dt \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cos((n + \frac{1}{2})x) h(x) + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t) \cos(n + \frac{1}{2})t dt, \end{aligned}$$

On en déduit, en remarquant que h' est continue sur le segment $[x, \pi]$ donc bornée par une constante M sur ce segment,

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi h(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \right| &\leq \frac{2}{2n + 1} \left(\underbrace{|\cos((n + \frac{1}{2})x)|}_{\leq 1} |h(x)| + \left| \int_x^\pi \underbrace{|h'(t)|}_{\leq M} \underbrace{|\cos(n + \frac{1}{2})t|}_{\leq 1} dt \right| \right) \\ &\leq \frac{2}{2n + 1} (|h(x)| + |\pi - x| M), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\int_x^\pi h(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Remarque : nous venons de redémontrer, dans un cas particulier, le fameux lemme de Borel-Lebesgue.

- (b) On déduit alors de la question précédente et de la question II.4, pour tout $x \in]0, \pi[$, $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi - x}{2}$,

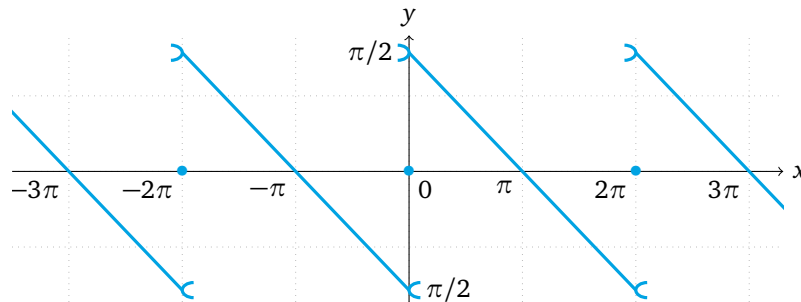
donc, par unicité de la limite, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ et cette égalité est encore vraie pour $x = \pi$.

Si x appartient à $] \pi, 2\pi[$ on a $x - 2\pi \in] -\pi, 0[$ et $2\pi - x \in]0, \pi[$, donc, h étant 2π -périodique et impaire,

$$f(x) = f(x - 2\pi) = -f(2\pi - x) = -\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{\pi - x}{2},$$

donc pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$

- (c)



III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

6. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} &= \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x) - S_{p-1}(x)}{p} = \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m+1}^n \frac{S_{p-1}(x)}{p} \\ &= \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} = \left[\frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p} \right] - \left[\sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} + \frac{S_m(x)}{m+1} \right] \end{aligned}$$

donc
$$\sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$

(b) On remarque déjà que, pour $x \in]0, 2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|S_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On déduit alors de la relation précédente et de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| &\leq \left| \frac{S_n(x)}{n} \right| + \sum_{p=m+1}^{n-1} |S_p(x)| \underbrace{\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right|}_{\geq 0} + \left| \frac{S_m(x)}{m+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) + \frac{1}{m+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque la série converge (cf. II.2), on obtient :

$$\left| \sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin px}{p} \right| \leq \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

7. (a) Par définition de $k = \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor$ on a $kx \leq \pi$ donc pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\sin(px) \geq 0$.

D'autre part, on sait que pour tout $X \geq 0$ on a $\sin X \leq X$ donc pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\sin(px) \leq px$.

Ainsi,
$$0 \leq \sum_{p=1}^k \frac{\sin px}{p} \leq \pi.$$

(b) Inégalité classique : il suffit d'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $\varphi : \theta \mapsto \sin \theta - \frac{2}{\pi}\theta$. On obtient sans peine le tableau de variations suivant

θ	0	$\text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta)$	0	?	0

qui montre que
$$\varphi(\theta) \geq 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(c) D'après l'inégalité obtenue en III.6.b et le résultat précédent (puisque $\frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$), on a :

$$\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq \frac{2}{(k+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{2}{(k+1) \frac{2}{\pi} \frac{x}{2}} = \frac{2\pi}{(k+1)x} < 2$$

puisque par définition de la partie entière on a $k \leq \frac{\pi}{x} < k+1$. Donc $\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2$.

8. En combinant les résultats des deux questions précédentes on a

$$\forall x \in]0, \pi], \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq \left| \sum_{p=1}^k \frac{\sin px}{p} \right| + \left| \sum_{p=k}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2 + \pi,$$

puis, par π -périodicité de la fonction $x \mapsto \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2 + \pi$.

Problème 2 (ESTP 1975, Navale 1992)

1. Question de cours. Voir le cours, donc.

2. Comme $v_n \rightarrow \ell$, $v_n - \ell = o(1)$ puis $u_n v_n - \ell u_n = o(u_n)$ et u_n est un terme général strictement positif de série divergente, donc avec la question précédente, $\sum_{p=0}^n (u_p v_p - \ell u_p) = \sum_{p=0}^n u_p v_p - \ell \sum_{p=0}^n u_p = o\left(\sum_{p=0}^n u_p\right)$ donc $w_n - \ell = o(1)$ et $w_n \rightarrow \ell$.

3. En prenant $v = ((-1)^n)_n$ et $u = (1)_n$, on obtient $w_n \rightarrow 0$ (car $w_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et $w_{2n+1} = 0$) et pourtant v n'a pas de limite.

La réciproque est fausse.

4. Comme tout est strictement positif, on passe par le logarithme

$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)}\right) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (\ln(p+1) - \ln p) = \frac{\ln(n+1) - 0}{n}$$

par télescopage.

Par croissances comparées, on a $\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)}\right) \rightarrow 0$, donc par continuité de l'exponentielle, $\sqrt[n]{\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)} \rightarrow 1$.

5. On a $u_n - v_n = o(v_n)$ avec v_n terme général strictement positif de série divergente donc d'après la première question,

$$S_n - S'_n = o(S'_n) \text{ c'est-à-dire } S_n \sim S'_n.$$

6. On remarque que $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ termes généraux strictement positifs de séries divergentes, donc d'après la question précédente puis par télescopage, $H_n \sim \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + o(\ln n)$ donc

$$H_n \sim \ln n.$$

7. On montre que la série télescopique de terme général $u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)$ converge.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ est un terme général de série télescopique convergente, et $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série **absolument** convergente par comparaison de séries à terme généraux positif, donc terme général de série convergente.

Finalement, $\sum u_n$ converge, donc par télescopage, $\left(\text{on a } \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n - \ln n \rightarrow \gamma.\right)$

8. (a) Il s'agit d'une version plus général de la règle de Raabe-Duhamel que celle vue en TD.

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\lambda}{n} = \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right) + \frac{\lambda}{n} = v_n + O\left(\left(-\frac{\lambda}{n} + v_n\right)^2\right) = v_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{|v_n|}{n}\right) + O(v_n^2)$

car $-\frac{\lambda}{n} + v_n \rightarrow 0$ car $\sum v_n$ est convergente.

Comme si $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ car $(a + b)^2 \geq 0$, $\frac{|v_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(v_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ donc $O\left(\frac{|v_n|}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O(v_n^2)$.

Donc $|w_n| = \left|v_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O(v_n^2)\right| \leq |v_n| + a_n + b_n$ avec $0 \leq a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $0 \leq b_n = O(v_n^2)$.

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum a_n$ converge. Puis comme $\sum |v_n|$ converge, $|v_n| \rightarrow 0$ donc $v_n^2 = o(|v_n|)$ et par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum v_n^2$ converge puis $\sum b_n$ converge.

Finalement, $\sum |v_n| + a_n + b_n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\left(\sum |w_n| \text{ converge.}\right)$

Remarque : en cas de doute quant à la manipulation de O , on peut toujours remplacer $O(x_n)$ par $x_n B_n$ où (B_n) est une suite bornée.

(b) On s'intéresse à la série télescopique de terme général

$$\ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n) = \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\lambda}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui est un terme général de série convergente comme somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes donc convergentes, en utilisant la question précédente.

On a donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(n^\lambda u_n) \rightarrow \ell$, puis en posant $A = e^\ell > 0$, $n^\lambda u_n \rightarrow A$ puis $\left(u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}.\right)$

(c) On pourrait simplifier l'écriture de u_n et utiliser la formule de Stirling, mais ce n'est pas la logique de l'énoncé. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = 1 - \frac{3}{2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série absolument convergente, on se retrouve dans la situation de la question (a) et d'après la question précédente, on a $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{3/2}}$.

Par comparaison des séries à termes positifs et par critère de Riemann ($3/2 > 1$), $\left(\sum u_n \text{ converge.}\right)$

9. (a) Par application de la question 2 avec $u = (1)_n$, on a bien que

$\left(\text{Si la série de terme général } u_n \text{ est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.}\right)$

(b) On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k u_\ell = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} u_\ell = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^n (n-\ell+1)u_\ell = S_n - \frac{\sum_{\ell=0}^n \ell u_\ell}{n+1}$$

Donc $S_n = \sigma_n + \frac{\sum_{\ell=0}^n \ell u_\ell}{n+1}$ avec $(\sigma_n)_n$ convergence par convergence au sens de Cesàro de $\sum u_n$ et par application

de la question 2 comme $nu_n \rightarrow 0$. Ainsi $\sum u_n$ converge.

Exercice : Autour d'une suite récurrente (ESTP 1975, Navale 1992, suite)

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante. Une étude rapide de $f : x \mapsto x + x^2$ (parabole de sommet $(-1/2, -1/4)$ passant par $(-1, 0)$ et $(0, 0)$) permet de voir que $] -1, 0[$ est stable par f donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ donc (u_n) est majorée par 0 et donc elle converge.

Par continuité, la limite vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc $u_n \rightarrow 0$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

3. Comme $v_n = -u_n \rightarrow 0$, $v_n^2 = o(v_n)$ donc avec la question précédente, $v_n \sim v_{n+1}$.

4. On calcule $a_n = \frac{v_{n-1} - v_n}{v_{n-1}v_n} = \frac{v_{n-1}^2}{v_{n-1}v_n} = \frac{v_{n-1}}{v_n} \sim 1$ d'après la question précédente.

Donc $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}} \sim 1 > 0$. Par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence (voir problème 2...

ou le cours !), $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k-1}} \right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \sim \sum_{k=1}^n 1 = n$.

Or $v_n \rightarrow 0$ donc $\frac{1}{v_0} = o\left(\frac{1}{v_n}\right)$ donc $\frac{1}{v_n} \sim n$ et $v_n \sim \frac{1}{n}$.

5. Par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.

Puis comme $v_n \rightarrow 0$, $\sin v_n^2 \sim v_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$, donc par critère de Riemann ($2 > 1$) et comparaison de séries à termes positifs,

$\sum \sin v_n^2$ converge.

Et $\frac{v_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ donc par critère de Riemann ($3/2 > 1$) et comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{v_n}{\sqrt{n}}$ converge.

6. $b_n = a_n - 1 \rightarrow 0$ d'après la question 4 puis $b_n = \frac{v_{n-1} - v_n}{v_n} = \frac{v_{n-1}^2}{v_n} \sim v_n$ donc $b_n \sim \frac{1}{n}$ d'après les questions 3 et

4.

7. Par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, comme $a_n - 1 \sim \frac{1}{n}$ (question précédente, on obtient $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} - n \sim H_n \sim \ln n$ (voir problème précédent).

Donc $\frac{1}{v_n} - n = \ln n + \frac{1}{v_0} + o(\ln n) = \ln n + o(\ln n) \sim \ln n$.

Or $\frac{1}{v_n} - n = \frac{n}{v_n} \left(\frac{1}{n} - v_n \right) \sim -t_n$ donc $t_n \sim -\frac{\ln n}{n}$.

Or pour tout $n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ donc par comparaison des séries à termes positifs et divergence de la série

harmonique, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge puis par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum t_n$ diverge.

Fin