Devoir en Temps Limité n° 2

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- Donnez tout, croyez-y, vous êtes aux concours et vous voulez décrocher l'école de vos rêves !

Les deux problèmes sont totalement indépendants. L'exercice est indépendant, mais le deuxième problème pourra être une source d'inspiration.
Les traiter sur des copies séparées.

Problème 1 : Autour de la transformation d'Abel

I. Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer b_k à l'aide deux termes de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

   On parle de **transformation d'Abel**.
2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente. Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et si la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
4. Énoncez et démontrer en utilisant une transformation d'Abel un critère garantissant la convergence d'une série alternée.
5. Exemple : dans cette question θ est un réel différent de $2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$. On donnera une forme simplifiée dans laquelle il ne reste plus qu'une exponentielle, en facteur.

   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x) + iS_n(x)$ et en déduire que
$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la valeur de cette somme de série.

3. Vérifier soigneusement que f est impaire et 2π-périodique.
4. Soit $x \in]0,\pi[$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(kx)}{k} = \dfrac{\pi - x}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^\pi \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$.
5. Soit $x \in]0,\pi[$. Pour tout $t \in [x,\pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$.

   (a) En procédant à un intégration par partie, et en en majorant la valeur absolue, montrer que $\displaystyle\int_x^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

   (c) Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente. On note, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Soit $x \in]0, 2\pi[$.
   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel, que pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant m < n$, on a
   $$\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$
   (b) En déduire que $|R_m(x)| \leqslant \dfrac{2}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}$.
7. Soit $x \in]0, \pi]$. On note $k = \left\lfloor \dfrac{\pi}{x} \right\rfloor$ la partie entière de $\dfrac{\pi}{x}$.
   (a) Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin px}{p} \leqslant \pi$.
   (b) Montrer que si $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta$.
   (c) Soit $n \geqslant k+1$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin px}{p}\right| \leqslant 2$.
8. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 1$, une majoration uniforme (indépendante à la fois de x et de n) de la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Problème 2

1. Soit u et v deux suites à termes réels strictement positifs tel que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. On note S_n et S'_n les sommes partielles des séries de terme général u_n et v_n respectivement.
   Montrer que si la série $\sum v_n$ diverge, alors $S_n = \mathrm{o}\left(S'_n\right)$.
2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\sum u_n$ diverge et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $w_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p v_p}{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
   Indication : on pourra chercher à écrire que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p (w_n - \ell)$ *sous forme d'un* $\mathrm{o}(\cdots)$, *ou bien revenir à la définition de la limite.*
3. La convergence de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entraîne-elle celle de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
4. Calculer la limite pour $n \to +\infty$ de $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p}\right)}$.
5. En reprenant les notations de la question 1, montrer que si les séries u et v à termes strictement positifs vérifient $u_n \sim v_n$ et sont termes généraux de séries divergentes, alors $S_n \sim S'_n$.
6. En déduire que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

7. Montrer plus précisément que $H_n - \ln n$ tend vers une limite γ lorsque $n \to +\infty$. *(On ne cherchera pas à calculer γ.)*
8. (a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n$ où v_n est le terme général d'une série absolument convergente, alors on a $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ terme général de série absolument convergente tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\lambda}{n} + w_n.$$
   Indication : on pourra utiliser en le justifiant le fait que si $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
   (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$.
   (c) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)}$.
9. (a) On dit que la série de terme général u_n converge au sens de Cesàro si la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Dire rapidement pourquoi, si la série de terme général u_n est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.
   (b) Soit la série de terme général u_n. On suppose que cette série converge au sens de Cesàro et que $nu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice : Autour d'une suite récurrente

On considère la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ et $u_0 \in]-1, 0[$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.
2. On pose $v_n = -u_n$. Quelle est la relation de récurrence vérifiée par v_n ?
3. Montrer que $v_n \sim v_{n+1}$.
4. On pose $a_n = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n-1}}$. Trouver un équivalent de a_n et en déduire un équivalent de v_n.
5. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Celle de la série de terme général $\sin v_n^2$? Celle de la série de terme général $\dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$?
6. On pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que $b_n \to 0$ et trouver un équivalent de b_n.
7. En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \dfrac{1}{n}$.

FIN DE L'ÉNONCÉ