Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 1

Exercice 1 : Analyse

1.a) f est continue par opérations sur $\mathbb{R}^*$ et $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ et comme Arctan et $t \mapsto t$ sont impaires, $\boxed{f \text{ est paire.}}$

1.b) On a directement $\boxed{f(t) = 1 + o(t)}$ donc f dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 0.}$

1.c) f est bien aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et si $t \neq 0$, $f'(t) = \dfrac{\frac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t}{t^2} = \dfrac{1}{t(1+t^2)} - \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par intégration par parties, $w \mapsto w$ et $w \mapsto -\dfrac{1}{1+w^2}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, t]$, on calcule

$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_0^t w \times \frac{2w}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\left[-\frac{w}{1+w^2}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{1+t^2} - \operatorname{Arctan} t\right] = -\frac{t^2}{2} f'(t)$$

que t soit nul ou non.

Finalement, $\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).}$

Comme $\dfrac{w^2}{(1+w)^2} \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w$ a le même signe que t, donc $\boxed{f \text{ croît sur } \mathbb{R}^- \text{ et décroît sur } \mathbb{R}^+.}$

2.a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f donc dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

Puis $\phi(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0) = f(0) = 1 = \phi(0)$ donc $\boxed{\phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Puis, si $x \in \mathbb{R}$, en posant $u = -t$, et par parité de f

$$\phi(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \phi(x).$$

Donc $\boxed{\phi \text{ est paire.}}$

2.b) $\boxed{\phi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ par opération (avec la fonction F dérivable) et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{\phi'(x) = \frac{x f(x) - F(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big).}$$

2.c) On suppose $x \geqslant 1$ sans perte de généralité. Alors, comme f est positive sur $\mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Puis $\left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\pi}{2x}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \dfrac{\pi \ln x}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$ Puis $\phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$

2.d) Soit $x > 0$. En utilisant 2.b et $(*)$, on a $\left|\phi'(x)\right| = \dfrac{1}{x}\left|f(x)-\phi(x)\right| = \dfrac{1}{x}(\phi(x)-f(x))$ donc, toujours par $(*)$, $\boxed{\left|\phi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{x}(1-f(x)).}$ Or $\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1-\dfrac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = x - \operatorname{Arctan} x = x(1-f(x))$.

Donc $\boxed{\left|\phi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$

2.e) Le fait que $t \geqslant 0$ et $(t-1)^2 \geqslant 0$ donne $\boxed{0 \leqslant \dfrac{t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}.}$ Puis, avec la question précédente, si $x > 0$, $\left|\phi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}$.

On a aussi $\left|\phi'(0)\right| = 0 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et comme ϕ est paire, ϕ' est impaire donc finalement $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left|\phi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Comme de plus ϕ est (continue et) dérivable sur $\mathbb{R}$, par inégalité des accroissements finis, $\boxed{\phi \text{ est } \dfrac{1}{4}\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$

3.a) Soit un entier naturel n. $\boxed{|u_{n+1}-\alpha| = |\phi(u_n)-\phi(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|}$ car ϕ est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne.

3.b) Alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{|u_0-\alpha|}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{u_n \to \alpha.}$

Exercice 2 : Algèbre

Partie I : Cas où $a \neq 1$

1.

- φ est linéaire par linéarité de l'évaluation polynomiale (à détailler dans la copie),
- $\dim \mathbb{R}_p[X] = \dim \mathbb{R}^{p+1}$
- φ est injective car son noyau est réduit à 0 : un polynôme de degré au plus p ayant $p+1$ racines étant nécessairement nul.

$\boxed{\text{Il s'agit donc d'un isomorphisme.}}$

---

2. Si $u \in E_a^{(p)}$, un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$ est tel que

$$\varphi(P) = (u_1 - au_0, \ldots, u_{p+1} - au_p).$$

L'injectivité de φ donne $\boxed{\text{l'unicité de } P.}$

---

3. On montre que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$.

- $E_a^{(p)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- $E_a^{(p)} \neq \varnothing$ car $(0)_n \in E_a^{(0)}$ avec $P_{(0)_n} = 0$.
- Si $u, v \in E_a^{(p)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+\lambda v)_{n+1} = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = a(u_n + \lambda v_n) + (P_u(n) + \lambda P_v(n)) = a(u+\lambda v)_n + P_{u+\lambda v}(n)$$

avec $P_{u+\lambda v} = P_u + \lambda P_v \in \mathbb{R}_p[X]$. Donc $u + \lambda v \in E_a^{(p)}$

Donc $\boxed{E_a^{(p)} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

---

4. La démonstration précédente et l'unicité de P donnent directement $\theta(u+\lambda v) = \theta(u) + \lambda\theta(v)$.

Donc $\boxed{\theta \text{ est bien une application linéaire de } E_a^{(p)} \text{ dans } \mathbb{R}_p[X].}$

---

5. $u \in \operatorname{Ker}\theta \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker}\theta = \{(\lambda a^n)_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect} y.}$

6.a) Comme $a \neq 1$, $\boxed{\deg Q_k = k}$ (et son cœfficient dominant est $1-a$).

6.b) $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une famille de $p+1 = \dim \mathbb{R}_p[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ non nuls a degrés étagés, donc libre. $\boxed{\text{C'est donc une base de } \mathbb{R}_p[X].}$

7.a) Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $Q_k = \theta\left(\left(n^k\right)_n\right)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^k = an^k + Q_k(n)$. Donc $\boxed{Q_k \in \operatorname{Im}\theta.}$

7.b) Comme $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, on déduit $\mathbb{R}_p[X] \subset \operatorname{Im}\theta \subset \mathbb{R}_p[X]$ donc $\boxed{\operatorname{Im}\theta = \mathbb{R}_p[X].}$

---

8. En appliquant le théorème du rang à θ, on en déduit que $E_a^{(p)}$ est de dimension finie et $\dim E_a^{(p)} = \operatorname{rg}\theta + \dim(\operatorname{Ker}\theta) = p + 1 + 1$ donc $\boxed{\dim E_a^{(p)} = p+2.}$

---

9. La famille $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ contient $p+2 = \dim E_a^{(p)}$ suites de $E_a^{(p)}$ comme cela a déjà été vu. Il suffit donc de démontrer qu'elle est libre.

Or si $\lambda_0 x^{(0)} + \cdots + \lambda_p x^{(p)} + \mu y = (0)$, alors, en composant par θ, $\lambda_0 Q_0 + \cdots + \lambda_p Q_p + 0 = 0$ et donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_p$ d'après 8.b et donc $\mu = 0$ car $y \neq (0)$.

Donc $\boxed{\left(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y\right) \text{ est une base de } E_a^{(p)}.}$

---

10. D'après ce qui précède on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu n + \nu 2^n$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

En calculant u_0, u_1 et u_2, on obtient le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda & & & + & \nu & = & -2 \\ \lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 3 \\ \lambda & + & 2\mu & + & 4\nu & = & 11 \end{array}\right.$

On obtient, après résolution, $(\lambda, \mu, \nu) = (-5, 2, 3)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n,\ u_n = 3 \cdot 2^n + 2n - 5.}$

Partie II : Cas où $a = 1$

11. On a cette fois $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Vect}((1)_n) = \operatorname{Vect}\left(x^{(0)}\right)$, puis $Q_0 = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\deg Q_k = k-1$.
Puis, comme dans la partie précédente, $(Q_1, \dots, Q_{p+1})$ base de $\mathbb{R}_p[X]$ donc $\operatorname{Im}\theta = \mathbb{R}_p[X]$ donc $\dim E_1^{(p)} = p+2$ avec $\boxed{\left(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)}\right) \text{ base de } E_1^{(p)}.}$

---

12. D'après la question précédente, on a $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu n + \nu n^2$.
En calculant u_0, u_1, u_2, on trouve un système de trois équations en λ, μ, ν qui conduit à $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = -2 + 4n - 3n^2.}$

FIN DE L'ÉNONCÉ