DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 1

Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.

Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.

Tout départ avant la fin des 2 heures n'est pas autorisé.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Exercice 1 : Analyse

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et $\forall\, t\neq 0,\ \ f(t)=\dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}$.

1.a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

1.b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

1.c) Montrer que $\forall\, t\in\mathbb{R},\ \ \displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{2}t^2f'(t)$. En déduire le sens de variation de f.

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall\, x\neq 0,\ \ \phi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\phi(0)=1$.

2.a) Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

On admet dans la suite que $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \ f(x)\leqslant\phi(x)\leqslant 1$ (*).

2.b) Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall\, x\in\mathbb{R}^*,\ \ \phi'(x)=\dfrac{1}{x}\big(f(x)-\phi(x)\big)$.

On admet que ϕ est aussi dérivable en 0, avec $\phi'(0)=0$.

2.c) Montrer que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. En déduire que $\phi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

2.d) Montrer que $\forall\, x>0,\ \ |\phi'(x)|\leqslant\dfrac{1}{x}(1-f(x))=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.e) Montrer que $\forall\, t\geqslant 0,\ \ 0\leqslant\dfrac{t}{1+t^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ puis que ϕ est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3. On admet que ϕ admet un unique point fixe α, et, pour $u_0\in\mathbb{R}$, on se donne la suite $(u_n)_n$ définie par pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\phi(u_n)$.

3.a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

3.b) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 2 : Algèbre

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=au_n+P(n)$$

où P est un polynôme (confondu avec la fonction polynomiale) et a un réel.

La partie I étudie le cas où $a\neq 1$.
La partie II étudie le cas où $a=1$.
On fixe un entier naturel p et on pose

$$E_a^{(p)}=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \exists\, P\in\mathbb{R}_p[X],\ \ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=au_n+P(n)\}.$$

Partie I : Cas où $a\neq 1$

On suppose dans cette partie que $a\neq 1$.

1. Soit $u\in E_a^{(p)}$. Il existe donc un polynôme $P\in\mathbb{R}_p[X]$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+P(n)$. Montrer l'unicité de P. On notera $P=P_u$ pour $u\in E_a(p)$.
On pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par $\varphi(P)=(P(0),P(1),\dots,P(p))$.

2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u)=P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Déterminer le noyau de θ.

5. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $Q_k=(X+1)^k-aX^k$.

5.a) Quel est le degré de Q_k ?

5.b) Montrer que la famille $(Q_0,Q_1,\dots,Q_p)$ est une base de $R_p[X]$.

6.

6.a) Montrer que pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, Q_k est dans $\operatorname{Im}\theta$.

6.b) Que peut-on en conclure ?

7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8. Pour $k\in[\![0,p]\!]$, on pose la suite $x^{(k)}$ définie par, pour tout n, $x_n^{(k)}=n^k$.
On note y la suite définie par pour tout n, $y_n=a^n$.
Montrer que $(x^{(0)},\dots,x^{(p)},y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9. Application : résoudre $\left\{\begin{array}{rcl}\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}&=&2u_n-2n+7\\ u_0&=&-2\end{array}\right.$

Partie II : Cas où $a=1$

On suppose dans cette partie que $a=1$.

10. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer

$$E_1^{(p)}=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \exists\, P\in\mathbb{R}_p[X],\ \ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=u_n+P(n)\}.$$

11. Application : résoudre $\left\{\begin{array}{rcl}\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}&=&u_n-6n+1\\ u_0&=&-2\end{array}\right.$

FIN DE L'ÉNONCÉ