DL 1 – UN CORRIGÉ

Partie 1 – Étude de la série

1. Soit $k \geqslant 2$, $k^2 > k(k-1) > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$,
$$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} > 0$$
et
$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n} \longrightarrow 1$$
La série télescopique de terme général $\dfrac{1}{n(n-1)}$ converge.

Avec le critère de comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$

De plus, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2} \leqslant 1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k(k-1)} = 2-\dfrac{1}{n}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $\boxed{\zeta(2) \leqslant 2.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n+\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{n}$.
   - $S_{n+1}-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k^2}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante (strictement).
   - $T_{n+1}-T_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=-\dfrac{1}{n(n+1)^2} < 0$ donc $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante (strictement).
   - $T_n-S_n=\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$.

   Ainsi $\boxed{(S_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes et convergent vers une même limite.}}$ Avec la question précédente, cette limite est $\zeta(2)$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \zeta(2) \leqslant T_n$ donc $0 \leqslant S_n-\zeta(2) \leqslant \dfrac{1}{n}$

   Ainsi $\boxed{S_{10} \leqslant \zeta(2) \leqslant T_{10}}$ est un encadrement à 10^{-1} près de $\zeta(2)$.

3. La fonction $f : t \in [1,+\infty[\to \dfrac{1}{t^2}$ étant décroissante et continue, par comparaison série intégrale, on peut écrire
$$S_n \leqslant \frac{1}{1^2}+\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2}=1+1-\frac{1}{n}\leqslant 2$$
Donc $(S_n)_n$ est majorée et comme la série est à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{n^2}}$ converge (et on retrouve $\zeta(2) \leqslant 2$).

4. On admet dans cette question que $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Toujours revenir aux sommes partielles pour ne pas risquer de considérer des sommes de séries non convergentes.
   - Notons $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k)^2}$ $A_n=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{4}S_n$

   $\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{(2n)^2} \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{1}{4}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{24}}$

- Notons $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$; $B_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n+1} - A_n$

  $\boxed{(B_n) \text{ converge}}$ comme différence de suites convergentes et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}.}$

- Notons $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

  $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par théorème de convergence absolue, $\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ converge.}}$

  $C_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = B_n - A_n$

  (C_{2n+1}) converge comme différence de suites convergentes et $C_{2n+1} \longrightarrow \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$

  (C_n) étant une suite convergente, elle converge vers la limite de chacune de ses suites extraites.

  Ainsi $\boxed{C_n \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.}$

Partie 2 – Calcul par les intégrales de Wallis

5. $\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{24}}$

---

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\cos^{2n+1}$.

   sin et $\cos^{2n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En intégrant par parties en dérivant $\cos^{2n+1}$,

   $$I_{n+1} = \left[\sin\cos^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1)\sin^2\cos^{2n} = 0 + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2)\cos^{2n} = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{2n} - \cos^{2(n+1)}\right)$$

   Il vient $I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$ d'où $\boxed{I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n.}$

---

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente, $I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}.}$

---

8. Soit $n \geqslant 1$. On effectue une première intégration par parties

   $$I_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t = \left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t 2n \cos^{2n-1}(t)(-\sin(t))\mathrm{d}t = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\mathrm{d}t$$

   puis une seconde intégration par parties :

   $$I_n(x) = 2n\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}(\cos(t)\cos^{2n-1}(t) - \sin^2(t)(2n-1)\cos^{2n-2}(t))\mathrm{d}t.$$

   Par linéarité,

   $$I_n(x) = -2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t + 2n(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}(1-\cos^2(t)\cos^{2n-2}(t))\mathrm{d}t$$

Avec la définition, $J_n(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$ et

$$I_n(x) = -nJ_n(x) + n(2n-1)(J_{n-1}(x) - J_n(x)) = -nJ_n(x) + n(2n-1)J_{n-1}(x) - 2n^2 J_n(x) + nJ_n(x)$$

On obtient enfin $\boxed{I_n(x) = n(2n-1)J_{n-1}(x) - 2n^2 J_n(x)}$

---

9. Avec les deux questions précédentes,

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

En multipliant par $\dfrac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!}$, on obtient

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!} \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} J_{n-1} - \frac{4^n((n-1)!)^2}{2(2n)!} 2n^2 J_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

Ainsi, $\boxed{K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}.}$

---

10. Par télescopage, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(K_{j-1} - K_j\right) = K_0 - K_n$. Avec la question précédente, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\pi}{4j^2} = K_0 - K_n$.

Or $K_0 = J_0$. En factorisant, $\boxed{\dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n.}$

---

11. En étudiant la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2} \sin t - t$ (en la dérivant deux fois) ou par une inégalité de concavité de sin pour les 5/2 ($y = \dfrac{2}{\pi} x$ est l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\pi/2$ qui se situe sous la courbe entre ces points), on obtient

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t.}$$

---

12. Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a alors $t^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} \sin^2 t$. En multipliant par $\cos^{2n}(t) \geqslant 0$, $t^2 \cos^{2n}(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2n}(t)$.

Par croissance et linéarité de l'intégrale sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) \mathrm{d}t$.

Or $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} - \cos^{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \sin^2$. Ainsi, $\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}).}$

Avec la question 6, $I_n - I_{n+1} = I_n - \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n = \dfrac{1}{2n+2} I_n$. On obtient alors $\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(n+1)} I_n.}$

---

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente et la question 7, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(n+1)} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

En multipliant par $\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 0$ avec $K_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$, on obtient $\boxed{0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16(n+1)}.}$

---

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec les questions 10 et 7, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{4}(J_0 - K_n) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{24} - K_n\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi}K_n$.

Avec la question précédente et par encadrement, $\boxed{K_n \longrightarrow 0.}$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$

Partie 3 – Calcul par des polynômes

1. On remarque que $P_n = \overline{P_n}$ donc $\boxed{P_n \in \mathbb{R}[X].}$

On a, comme somme de deux polynômes de degré $2n+1$, que $\deg P_n \leqslant 2n+1$. Le terme en X^{2n+1} est $\dfrac{X^{2n+1} - X^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = 0$, et par le binôme, celui en X^{2n} est $\dfrac{\binom{2n+1}{1}\mathrm{i}X^{2n} - \binom{2n+1}{1}(-\mathrm{i})X^{2n}}{2\mathrm{i}}$ *ie* $(2n+1)X^{2n}$. Donc $\boxed{\deg P_n = 2n}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(P_n) = 2n+1.}$

On peut aussi voir tout cela en utilisant la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{i}^k X^{2n+1-k}\right).$$

Comme les termes d'indice pair s'annulent dans les deux sommes, on obtient alors, en écrivant $k = 2p+1$,

$$P_n = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{i}^{2p+1}X^{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(n-p)}.$$

ce qui redonne les trois résultats.

2. z est racine de P_n si et seulement si $(z+\mathrm{i})^{2n+1} = (z-\mathrm{i})^{2n+1}$. Comme $\mathrm{i}(\neq 0)$ n'est pas solution, c'est équivalent à $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^{2n+1} = 1$ soit encore $(\star)$ $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}$ où $k \in [\![0, 2n]\!]$. On peut éliminer $k = 0$ car cela ne donne aucune solution en z. Or

$$(\star) \Longleftrightarrow (z+\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}(z-\mathrm{i}) \Longleftrightarrow z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}-1} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}+\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}-\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}} = \mathrm{cotan}\frac{k\pi}{2n+1} = x_k.$$

On en déduit que $\boxed{P_n \text{ possède } 2n \text{ racines : les } \mathrm{cotan}\dfrac{k\pi}{2n+1} \text{ pour } k \in [\![1, 2n]\!].}$

3. Vu l'expression trouvée dans la première question, si $\boxed{Q_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{n-p},}$ alors $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n = Q_n(X^2)$.

On a alors $\boxed{\deg Q_n = n}$ et $\boxed{\mathrm{cd}(Q_n) = 2n+1.}$

Le cœfficient de degré $n-1$ est $-\dbinom{2n+1}{3} = -\dfrac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{6} = \boxed{-\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}.$

De plus, si z est racine de P_n, z^2 est racine de Q_n. Ainsi, d'après la question précédente, les $\mathrm{cotan}^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1, 2n]\!]$ sont racines de Q_n.

Mais pour $k \in [\![1,n]\!]$, $0 < k \leqslant n$ donc $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} \leqslant \dfrac{n}{2n+1}\pi < \dfrac{\pi}{2}$, et $\operatorname{cotan}^2 = \dfrac{1}{\tan^2}$ est injective sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (car strictement décroissante).

Cela donne donc n racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré n : on les a toutes.

$\boxed{\text{Les racines de } Q_n \text{ sont donc les } \operatorname{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{2n+1} \text{ pour } k \in [\![1,n]\!].}$

---

4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}$ est la somme des racines de Q_n (qui est scindé dans $\mathbb{C}$ et même dans $\mathbb{R}$ car il a n racines réelles et est de degré n). Donc si on note q_i ses cœfficients,

$$S_n = -\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)}$$

donc $\boxed{S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}.}$

Or si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{1}{\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$.

Donc $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = S_n + n$. Donc $\boxed{T_n = \dfrac{2n(n+1)}{3}.}$

---

5. De simples études de fonctions, ou l'intégration de $\cos t \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2 t$ sur $[0, x]$ permettent d'obtenir

$$\boxed{\forall\, x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ \ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.}$$

Avec la question précédente, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, comme tout est positif,

$$\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \leqslant \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Comme de plus $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{2n+1} \leqslant \left(\dfrac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

En sommant, on obtient $S_n \leqslant \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant T_n$.

Ainsi,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n = \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \pi^2 \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} T_n.$$

Finalement, par encadrement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

Partie 4 – Calcul par le noyau de Dirichlet

6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Avec la formule trigonométrique $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin(b+a) - \sin(b-a)$, il vient $\boxed{2\sin \dfrac{x}{2} \cos(kx) = \sin \dfrac{(2k+1)x}{2} - \sin \dfrac{(2k-1)x}{2}.}$

---

7. **Méthode 1** Par récurrence, $x \not\equiv 0[2\pi]$ donc $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

- $D_0(x)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sin\left(\left(0+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $D_n(x)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

$$D_{n+1}(x)=D_n(x)+\cos((n+1)x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos((n+1)x)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Avec la question précédente, $D_{n+1}(x)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)+\sin\frac{(2n+3)x}{2}-\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\left(\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

- Ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ D_n(x)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.}$

Méthode 2 A l'aide d'une somme télescopique.

En sommant la relation $2\sin\dfrac{x}{2}\cos(kx)=\sin\dfrac{(2k+1)x}{2}-\sin\dfrac{(2k-1)x}{2}$ pour k décrivant $[\![1,n]\!]$, on obtient après télescopage et factorisation

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(1)x}{2}.$$

Donc, avec la définition de $D_n(x)$,

$$2\sin\frac{x}{2}(D_n(x)-\frac{1}{2})=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\frac{x}{2}.$$

D'où $\boxed{D_n(x)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}}$

Méthode 3 Calcul d'une somme géométrique.

Pour tout entier $n\geqslant 1$ et tout réel $x\not\equiv 0[2\pi]$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}\right)$.

Avec la formule de Moivre et comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}=\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-\mathrm{e}^{inx}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

Or $1-\mathrm{e}^{inx}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{nx}{2}}-e^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\right)=-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\sin\frac{nx}{2}$ et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=-2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Puis, en prenant la partie réelle, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

D'où $\displaystyle D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{1}{2}x+2\sin\frac{nx}{2}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$.

Or $2\sin\frac{nx}{2}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$, d'où $\boxed{D_n(x)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}}$

---

8. En intégrant par parties, pour tout entier $k\geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos(kx)\mathrm{d}x=\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\mathrm{d}x=0+\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}$

d'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos(kx)\mathrm{d}x=\frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}=\frac{(-1)^k-1}{k^2}.}$

Puis $\displaystyle L_n=\int_0^{\pi}xD_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}x\cos(kx)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\mathrm{d}x$ par linéarité.

Avec le calcul de la question précédente, $\boxed{L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}.}$

9. (a) Au voisinage de 0 , $\sin x \sim x$ et $\frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \sim \frac{x}{\frac{x}{2}} \sim 2$, donc $x \mapsto \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction f en posant $\boxed{f(0) = 2.}$

(b) En effectuant un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{6} - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o_{x\to 0}\left(x^3\right) = \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

Ainsi $\boxed{\sin x - x \cos x \sim \frac{x^3}{3}}$

(c) f est dérivable sur $]0,\pi]$ et $\forall x \in]0,\pi]$, $f'(x) = \frac{\sin \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

Or on a $\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$ et avec la question précédente, $f'(x) \sim \frac{x^3}{24}\frac{4}{x^2} \sim \frac{x}{6}$.

On a donc que f continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$, $f'(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. D'après le théorème de prolongement des applications de classe $\mathscr{C}^1$ (corollaire du théorème des accroissements finis), $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi] \text{ et } f'(0) = 0.}$

10. ϕ et $x \mapsto -\frac{\cos \lambda x}{\lambda}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. En intégrant par parties,

$$\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \left[-\phi(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x$$

Donc $\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{-\phi(\pi)\cos(\lambda\pi) + \phi(0)}{\lambda} + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x$.

Par inégalité triangulaire intégrale (licite car $\pi > 0$), $\left|\int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^\pi |\phi'(x)|\frac{|\cos\lambda x|}{\lambda}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x$.

Puis, par inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant \left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{|\phi(\pi)+\phi(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|\phi(\pi)+\phi(0)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x\right).$$

Ainsi $\boxed{\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.}$

11. Avec la question 9, f est de $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Or $L_n = \int_0^\pi xD_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Comme $n + \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, avec la question précédente, $\boxed{L_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

Puis $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1-(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k)^2} = 2S_{2n+1} - \frac{1}{2}S_n$.

Donc avec la question 8, $L_{2n+1} = \frac{\pi^2}{4} - 2S_{2n+1} + \frac{1}{2}S_n$.

Reste à faire $n \longrightarrow +\infty$, ce qui permet d'obtenir $0 = \frac{\pi^2}{4} - 2\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(2)$ et enfin $\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.}$