Programme de colle – MP 1

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

Révisions complètes du cours d'algèbre linéaire de MPSI concernant les espaces vectoriels et les applications linéaires (voir programme page suivante).

2. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Groupes et sous-groupes	
Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
b) Morphismes de groupes	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
e) Anneaux	
Anneau. Produit fini d'anneaux. Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.	Les anneaux sont unitaires.
Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les corps sont commutatifs.
f) Idéaux d'un anneau commutatif	
Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.	
Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre. Idéaux de $\mathbb{Z}$.	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
i) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Les notions d'ordre d'un élément dans un groupe, de groupe engendré par une partie, de groupe monogène ou cyclique, l'arithmétique sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{K}[X]$ seront vues plus tard.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Intersection quelconque de sous-groupes. Cas de la réunion de deux sous-groupes.

(ii) Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes à l'aide du noyau. Réciproque d'un isomorphisme.

(iii) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau principal.

(iv) Images directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe. Tout corps est intègre.

(v) Formule du binôme par dénombrement et par récurrence.

(vi) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau principal (et en particulier intègre).

(vii) Image directe ou réciproque d'un sous-anneau ou d'un idéal par un morphisme d'anneaux.

(viii) Théorème du rang (u induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau sur l'image + formule)

(ix) **CCINP 55** : Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2au_{n+1}+4(\mathrm{i}a-1)u_n \text{ avec } (u_0,u_1)\in\mathbb{C}^2.$$

(a) i. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
    ii. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

(b) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0=1$ et $u_1=1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

(x) **CCINP 64** : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

(a) Démontrer que : $E=\mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f \Longrightarrow \mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2$.

(b) i. Démontrer que $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}f=\mathrm{Ker}f^2$.
    ii. Démontrer que $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2 \Longrightarrow E=\mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f$.

(xi) **CCINP 60** : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M)=AM$.

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}f$.

(b) f est-il surjectif ?

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Im}f$.

(d) A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}f\oplus\mathrm{Im}f$?

(xii) **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n>0$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u^3+u^2+u=0$. On notera Id l'application identité sur E.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}u\oplus\mathrm{Ker}u=E$.

(b) (5/2)
    i. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
    ii. En déduire que $\mathrm{Im}u=\mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$.

(c) (5/2) On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

3. Programme de MPSI

A. Structures algébriques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Lois de composition internes	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble. Sous-groupe : définition, caractérisation.	Notation S_X.
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau, corps.	Tout anneau est unitaire, tout corps est commutatif. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau. Groupe des inversibles d'un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.

B. Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Notations $\mathrm{Vect}(X)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\mathrm{Vect}(X)$.
c) Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices. Familles et parties libres, liées. Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique.

C. Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice. Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie. Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Dimension d'une somme de deux sous-espaces ; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Dimension commune des supplémentaires.

D. Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes.	L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.
Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathfrak{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(u(x_i), i \in I\right)$. Image d'une base par un isomorphisme.	
Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Notation id_E. Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{id}$.	
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$: $\quad u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\mid E_i} = u_i$ pour tout i.	
d) Théorème du rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}\, u$. Théorème du rang : $\quad \dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Formes coordonnées relativement à une base. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $\quad E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.