# Programme de colle – MP 1

## 1. Series numériques

Extrait du programme officiel :

| Contenus | Capacités & commentaires |
| --- | --- |
| **a) Séries ~~à valeurs dans un espace normé de dimension finie~~** | |
| Sommes partielles. Convergence, divergence. | La série de terme général $u_n$ est notée $\sum u_n$. |
| Somme et restes d'une série convergente. | En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. |
| Linéarité de la somme.<br>Le terme général d'une série convergente tend vers 0.<br>Lien suite-série.<br>Série absolument convergente.<br>Une série absolument convergente ~~d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie~~ est convergente. | Divergence grossière.<br>La suite $(u_n)$ et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.<br>~~Cas des séries matricielles.~~<br>Le critère de Cauchy est hors programme. |
| **b) Compléments sur les séries numériques** | |
| Règle de d'Alembert.<br>Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes. | Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.<br>L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme. |
| Comparaison série-intégrale :<br>Si $f$ est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge.<br>Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence. | Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où $f$ est monotone.<br>Interprétation géométrique.<br>La suite de référence est positive à partir d'un certain rang.<br>Cas des séries convergentes, des séries divergentes. |

## 2. Structure de groupe

Extrait du programme officiel :

| Contenus | Capacités & commentaires |
| --- | --- |
| **a) Groupes et sous-groupes** | |
| Groupe. Produit fini de groupes.<br>Sous-groupe. Caractérisation.<br>Intersection de sous-groupes.<br>Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$. | Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie. |
| **b) Morphismes de groupes** | |
| Morphisme de groupes.<br>Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.<br>Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme.<br>Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme. | Exemples : signature, déterminant.<br>Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien. |

Les notions d'ordre d'un élément dans un groupe, de groupe engendré par une partie, de groupe monogène ou cyclique seront vues plus tard.

*Semaine prochaine :* Structures algébriques (suite), révisions d'algèbre linéaire.

### Questions de cours :

(i) Comparaison série-intégrale pour une fonction continue par morceaux décroissante. Si, de plus, la fonction est positive, la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

(ii) Séries de Riemann. Convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence.

(iii) Détermination d'un développement asymptotique de la série harmonique : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ par deux méthodes différentes.

(iv) Étude générale des séries de Bertrand. Voir aussi CCINP 5.

(v) Formule de Stirling : il existe $K>0$ tel que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, détermination de $K$ à partir de l'expression et d'un équivalent des intégrales de Wallis.

(vi) Sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence.

(vii) Sommation des relations de comparaison dans le cas de convergence.

(viii) Intersection quelconque de sous-groupes. Cas de la réunion de deux sous-groupes.

(ix) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$

(x) Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes à l'aide du noyau.

(xi) **CCINP 5** :

(a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. **Cas** $\alpha \leqslant 0$ : En utilisant une minoration très simple de $u_n$, démontrer que la série diverge.

ii. **Cas** $\alpha > 0$ : Étudier la nature de la série.
**Indication** : On pourra utiliser la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

(b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

(xii) **CCINP 6** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $\ell$ un réel positif strictement inférieur à 1.

(a) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

**Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour $n$ assez grand, $u_n$ par le terme général d'une suite géométrique.

(b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$ ?

(xiii) **CCINP 7** :

(a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

(b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
**Remarque** : i est ici le nombre complexe de carré égal à $-1$

(xiv) **CCINP 8** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

**Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

(b) i. Étudier la convergence ~~simple sur~~ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série ~~de fonctions~~ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

ii. (5/2) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(xv) **CCINP 46** : On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $\alpha$ est un réel que l'on déterminera.

(b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

(c) $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

# 3. Programme de MPSI

## Structures algébriques

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Lois de composition internes** | |
| Loi de composition interne.<br>Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.<br>Partie stable. | Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles. |
| **b) Structure de groupe** | |
| Groupe. | Notation $x^n$ dans un groupe multiplicatif, $nx$ dans un groupe additif.<br>Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$. |
| Groupe des permutations d'un ensemble.<br>Sous-groupe : définition, caractérisation. | Notation $S_X$. |