Programme de colle – MP 1

1. Suites, analyse asymptotique

Révisions du programme de MPSI. Voir page suivante.
En particulier, étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, exemples de développements asymptotiques.

2. Séries numériques réelles et complexes (MPSI)

Révisions du programme de première année, voir page suivante.

3. Séries numériques (MP)

On se contente pour le moment de **séries numériques**.
Les comparaisons séries intégrales ne sont revues qu'en début de semaine.
Pas de sommation des relations de comparaison cette semaine.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries ~~à valeurs dans un espace normé de dimension finie~~	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Lien suite-série. Série absolument convergente. Une série absolument convergente ~~d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie~~ est convergente.	 Divergence grossière. La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature. ~~Cas des séries matricielles.~~ Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Règle de d'Alembert. Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone. Interprétation géométrique.
~~Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.~~	~~La suite de référence est positive à partir d'un certain rang.~~ ~~Cas des séries convergentes, des séries divergentes.~~

Semaine prochaine : Séries, structures algébriques.

Questions de cours :

(i) Formulaire de développements limités ($\exp, \cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, (1+x)^\alpha, \dfrac{1}{1\pm x}, \ln(1\pm x)$, Arctan, tan et th à l'ordre 7).

(ii) Intégrales de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$: relation de récurrence, expression, équivalent.

(iii) De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone. On en déduit le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.

(iv) Critère des séries alternées, signe et encadrement des restes : voir aussi CCINP 8.

(v) Critère de d'Alembert : voir aussi CCINP 6.

(vi) **CCINP 1**

(a) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(vii) **CCINP 6** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

(a) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

(b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

(viii) **CCINP 7** :

(a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

(b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Remarque : i est ici le nombre complexe de carré égal à -1

(ix) **CCINP 8** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

(b) i. Étudier la convergence ~~simple sur~~ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série ~~de fonctions~~ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

ii. (5/2) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(x) **CCINP 43** : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.

(a) i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.

4. Programme de MPSI

A. Suites

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \longrightarrow \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Lien avec la définition vue en Terminale.
Unicité de la limite.	Notation $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	
Suites monotones	
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite. Théorème des suites adjacentes.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Suites extraites	
Suite extraite.	
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Les étudiants doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie, mais la formalisation précise n'est pas exigible. La notion de valeur d'adhérence est hors programme.
Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	
Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	La démonstration n'est pas exigible.
Suites particulières	
Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.	Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.
Exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.	Seul résultat exigible : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Contenus	Capacités & commentaires
Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^{\beta}(n), n^{\alpha}, \mathrm{e}^{\gamma n}$.
Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
Exemples de développements asymptotiques	
	La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling.	La démonstration n'est pas exigible.

B. Séries

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.	
c) Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
d) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy est hors programme. La convergence de la série absolument convergente $\sum u_n$ est établie à partir de celles de $\sum u_n^{+}$ et $\sum u_n^{-}$.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
e) Représentation décimale des réels	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	La démonstration n'est pas exigible.