CHAPITRE V

Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

I CALCUL MATRICIEL

1 Espaces de matrices

Propriétés

(i) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *a une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, d'élément nul* $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$

Remarque

$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ (et non n !)

Définition

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ j & \end{array}$$

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété

$\forall\, i, k \in [\![1, n]\!], \ \ \forall\, j, \ell \in [\![1, p]\!], \ \ (E_{i,j})_{k,\ell} =$

Définition : Produit matriciel

On définit $\times$: $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & C = A \times B \end{array} \right.$

avec $\forall\, i \in [\![1, n]\!], \ \ \forall\, j \in [\![1, q]\!], \ \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Remarques

R 1 – Si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A et $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B :

- $c_{i,j} = L_i \times C_j$.
- Les lignes de $A \times B$ sont $L_1 \times B, \dots, L_n \times B$.
- Les colonnes de $A \times B$ sont $A \times C_1, \dots, A \times C_q$.

R 2 – On retiendra que la multiplication à gauche agit sur les lignes, et la multiplication à droite sur les colonnes (comme les indices).

R 3 – ⚠ Il faut que les tailles soient compatibles pour multiplier des matrices.
Même si les matrices sont carrées, **le produit n'est pas commutatif** (sauf si $n = 1$!).

Propriétés

(i) ***Associativité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(ii) ***Bilinéarité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \mapsto A \times B$ *et* $B \mapsto A \times B$ *sont linéaires.*

(iii) ***Neutre*** *: Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Propriété : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles, $E_{i,j} \times E_{k,\ell} =$

Remarque

⚠ Les différentes $E_{\circ,\circ}$ ne vivent pas dans les mêmes espaces de matrices (ne sont pas de mêmes tailles.)

Théorème : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \end{array}$ *et* $N = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array} \end{array}$ *où* A, B, C, D, E, F, G, H *sont des matrices de format correspondant. Alors* $M \times N = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,r+s}(\mathbb{K})$.

2 Transposition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice ${}^tA = A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, (i,j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \ \ (A^\top)_{i,j} = ({}^tA)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Remarque

${}^tA$ notation française. $A^\top$ notation anglo-saxonne, donc internationale.

Propriétés

Soit T : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array} \right.$

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$$

(ii) T *est* ***involutif*** *: si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$.

3 Matrices carrées

a La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n. Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une K-algèbre de dimension n^2.

Propriété

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Propriétés

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A\times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) Sont équivalentes :
- *A est inversible*
- *A est inversible à gauche*
- *A est inversible à droite*
- *les colonnes de A forment une famille libre*
- *les lignes de A forment une famille libre*

(v) Si $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^\intercal \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas $(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$

Méthode : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n = 2$ ou 3 (voir déterminant).

b Matrices carrées particulières

Définition

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j,\quad m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j,\quad m_{i,j} = 0$.)
  On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.
  Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**
- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i \neq j,\quad m_{i,j} = 0$.
  On note $\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n) = \begin{pmatrix}a_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & a_n\end{pmatrix}$.
  On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^\intercal = S$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\quad s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^\intercal = S\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^\intercal = -A$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\quad a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^\intercal = -A\}$.

Remarque

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Propriété

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Remarque

Si $0 \leqslant \ell \leqslant n$, $\begin{pmatrix}0 & & (\star)\\ & \ddots & \\ (0) & & 0\end{pmatrix}^\ell = \begin{array}{c}\leftarrow \ell \rightarrow \\ \begin{pmatrix}0 & \ldots & 0 & & (\star)\\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 0\\ & (0) & & \ddots & \vdots\\ & & & & 0\end{pmatrix}\end{array}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Propriété

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

Remarque

L'inverse d'une matrice (inversible) (anti)symétrique l'est encore, mais c'est faux pour le produit en général.

c Trace d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriétés

(i) ***Linéarité*** : *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *et* $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

⚠ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
  - ⋆ Si $x = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on appelle **matrice de** x **dans la base** $\mathcal{B}$ la matrice colonne

$$X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

  - ⋆ Si $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ (ie $\vec{x}_j \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)
    On appelle **matrice de la famille** $\mathcal{F}$ **dans la base** $\mathcal{B}$ la matrice rectangulaire

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_p \end{array} \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

    On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Si E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  On appelle **matrice de l'application linéaire** u **dans les bases** $\mathcal{B}$ **au départ et** $\mathcal{C}$ **à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_p))$$

  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathcal{B}$.
  Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété

L'application $\begin{array}{|ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array}$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Remarque

On retrouve que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$.

Propriété

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{x})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$.

Propriété

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).$$

Propriété

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\begin{array}{|ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$. Application linéaire canoniquement associée : $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \end{array} \right.$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ correspondant à $\operatorname{Ker} u = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{K}^p} \right\}$

$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \ ; \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\}$ correspondant à $\operatorname{Im} u = \left\{ u(\vec{x}) \ ; \ \vec{x} \in \mathbb{K}^p \right\}$.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} A)$$

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ *où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A.*

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(iii) ***Formule du rang*** *:* $\operatorname{rg} A + \dim(\operatorname{Ker} A) = p$.

Propriété

Sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible

(ii) Son application linéaire canoniquement associée u est un automorphisme

(iii) $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(iv) $\operatorname{rg} A = n$

3 Changement de base

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Autrement dit $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E)$.

Propriétés

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Remarques

R 1 – La réciproque est vraie : toute matrice inversible est une matrice de passage.

R 2 – On en déduit une nouvelle méthode d'inversion de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = u(\mathcal{B})$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{e}_1{}' & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' & = & 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3{}' & = & 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{e}_1 & = & -\vec{e}_1{}' + 2\vec{e}_2{}' - \vec{e}_3{}' \\ \vec{e}_2 & = & 2\vec{e}_1{}' - 2\vec{e}_2{}' + \vec{e}_3{}' \\ \vec{e}_3 & = & -\vec{e}_2{}' + \vec{e}_3{}' \end{array} \right.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\vec{x} \in E$.

Si $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$ et $X' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$, alors

$$\underset{\mathcal{B}}{X} = \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} \times \underset{\mathcal{B}'}{X'}$$

Propriété

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{C}' \to \mathcal{C}}{P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}} \times \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{A} \times \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad ie \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}{P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}} \times \underset{\mathcal{B}}{A} \times \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

$$A' = P^{-1}AP \quad ie \quad A = PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UBV$.

Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Cela définit une relation d'équivalence.

Propriété

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^\top$ et $B^\top$ le sont.

Théorème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Remarque

Par opérations élémentaires, on peut passer de A à $J_{n,p,r}$.

Les opérations sur les lignes se traduisent par la multiplication à gauche par des matrices inversibles, les opérations sur les colonnes se traduisent par la multiplication à droite par des matrices inversibles. On obtient alors explicitement U et V inversibles telles que $UAV = J_{n,p,r}$.

Corollaire

(i) *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

(ii) *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.*

(iii) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*

5 Matrices semblables

Définition : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Remarque

Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse.

En particulier, des matrices semblables ont même rang.

Propriété

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.

Méthode

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

(i) $\forall k \in \mathbb{N},\quad A^k = PB^kP^{-1}$

(ii) *A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans $\mathbb{Z}$.*

Propriété

Si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. La réciproque est fausse.

Définition

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Propriété

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \ldots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut id_E. On note $F_1, \ldots, F_m$ les images de $p_1, \ldots, p_m$. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$.

6 Rang et matrices extraites

Définition : Matrice extraite

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

On notera $A|_{I \times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Propriété

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

III OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

Les permutations (ou plus exactement transpositions) $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Les transvections $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j+\lambda C_k$ avec $k \neq j$.

Les dilations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

1 Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

Permutations $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (resp. à droite) par la **matrice de permutation** (et plus précisément transposition) :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ (0) & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\quad \uparrow i^{\text{e}} \quad\quad \uparrow j^{\text{e}} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

Transvections $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_k$ (resp. $C_j \leftarrow C_j+\lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (resp. $T_{k,j}(\lambda)$ à droite) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda & \cdots & 1 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{e}} \; = I_n + \lambda E_{i,j}$$
$$\uparrow j^{\text{e}}$$

$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda+\mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (resp. à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ (0) & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{e}}$$

$D_i(\lambda)D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

2 Propriétés des opérations élémentaires

Propriété

(i) Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.

(ii) Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.

(iii) Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

3 Matrices échelonnées

Définition

Une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Remarques

R 1 – Si elle est carrée, elle est nécessairement triangulaire supérieure (resp. inférieure).

R 2 – Si une ligne (resp. colonne) est nulle, les suivantes le sont aussi.

Exemples

E 1 – $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes.
$2, 3, -4, 6$ sont appelés **pivots**.

E 2 – $B = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes.
$-1, -1$ sont les pivots.

E 3 – $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

Propriété

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes.)

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (resp. colonnes) de la matrice.

4 Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) est le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles.

Remarque

En faisant des opérations sur les colonnes, on peut obtenir à la fois le rang, l'image et le noyau !

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

En appliquant ensuite un pivot de Gauss sur les lignes, on peut se ramener à J_r.

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A.
• Sur les lignes : $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n \Longrightarrow A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I_n$.
• Sur les colonnes : $A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = I_n \Longrightarrow A^{-1} = I_n Q_1 Q_2 \cdots Q_k$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\boxed{(S) \Longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}}$
- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A,

$$\boxed{(S) \Longleftrightarrow u(\vec{x}) = \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{x} \in u^{-1}\left(\left\{\vec{b}\right\}\right)}$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$ φ_i la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la i^e (canoniquement associée à la i^e ligne de A) :

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array} \right.$$

alors $\boxed{(S) \Longleftrightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \varphi_i(\vec{x}) = b_i \Longleftrightarrow \vec{x} \in \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$

b Espace des solutions

Définition

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u \leqslant \min(n,p)$.

Propriété

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.

Propriété

L'ensemble des solution $\mathcal{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathcal{S}_S = \vec{x}_0 + \mathcal{S}_H$ où $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathcal{S}_H$.

*Lorsque $\mathcal{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llllll} p_1 x_{i_1} + & \cdots & & & = & b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + & \cdots & & = & b'_2 \\ & & & & \vdots & \\ & & p_r x_{i_r} + & \cdots & = & b'_r \\ & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & = & b'_n \end{array} \right.$$

où $r = \operatorname{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n-r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathcal{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.