CHAPITRE
Séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les séries

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum_n u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Propriété : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1} = 0$)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = S_n - S_{n-1}}$$

Propriété

*Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1} = 0$) appelée **série télescopique**.*

Corollaire

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

3 Espace vectoriel des séries convergentes

Propriété

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\, u_n$$

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété : Divergence grossière

*Si $u_n \not\to 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

5 Reste d'une série convergente

Définition

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre** n **de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$.

Propriété

*Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et R_n son reste d'ordre n, alors $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

6 Un critère simple pour des séries à termes positifs

Propriété

*Soit (u_n) suite **réelle positive**, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors*

(i) (S_n) est croissante

(ii) (S_n) à une limite finie ou $+\infty$.

(iii) $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

7 Séries alternées

Théorème : Critère Spécial sur des Séries Alternées

*Si $u = (u_n)_n$ est une suite **réelle** telle que*

H1 *u décroissante*

H2 *$u_n \to 0$*

alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, si on note $v_n = (-1)^n u_n$,

- *La somme S a le même signe que $v_0 = u_0$.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n, a le même signe que v_{n+1} et vérifie $|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}$.*

II CONVERGENCE ABSOLUE

Définition

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : convergence absolue ⇒ convergence

Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fausse.

Propriété

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

III SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum(-u_n)$ si le signe est négatif.

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Théorème : Comparaison des séries à termes réels positifs : cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.*

Si $\sum v_n$ converge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\bullet\ u_n = O(v_n), \qquad \bullet u_n = o(v_n),$$

$$\bullet\ \text{apcr } u_n \leqslant v_n, \qquad \bullet u_n \sim v_n$$

alors $\sum u_n$ converge.

Corollaire : Comparaison des séries à termes positifs : cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*

Si $\sum u_n$ diverge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\bullet\ u_n = O(v_n), \qquad \bullet u_n = o(v_n),$$

$$\bullet\ \text{apcr } u_n \leqslant v_n, \qquad \bullet u_n \sim v_n$$

alors $\sum v_n$ diverge.

Méthode : Utilisation pour des séries quelconques

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = O(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = o(v_n)$ ou que $|u_n| = O(v_n)$.

Si $|u_n| = o(v_n)$ ou $O(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

2 Critère de d'Alembert

Propriété : Critère de d'Alembert

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0, +\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

3 Comparaison série-intégrale

a Comparaison et caractérisation de convergence

Propriété : Comparaison série-intégrale d'une fonction décroissante

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroît et est continue par morceaux alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

Propriété

*Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante, **positive** et continue par morceaux alors*

(i) $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge.

(ii) Si $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$, alors $\sum w_n$ converge.

b Séries de Riemann

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

c Séries de Bertrand

Méthode : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais très classique.

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre daccélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que

$\boxed{\text{la série converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$

- Si $\alpha < 0$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent), ou si $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, avec $\gamma \in]1, \alpha[$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ étant convergente, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

d Évaluation des sommes partielles et des restes

IV Formule de Striling

Théorème : Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

V Sommation des relations comparaison

1 Cas de divergence

Théorème

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.

2 Cas de convergence

Théorème

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.

VI Produit de Cauchy

Définition : Produit de Cauchy

Soient $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

La série de terme général w_n est appelée **produit de Cauchy** de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum w_n$ l'est aussi. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

VII Développement décimal illimité (rappels de MPSI)

Théorème

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0{,}a_1 a_2 \ldots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n \geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$.

Définition

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x.