CHAPITRE

Séries numériques

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries ~~à valeurs dans un espace normé de dimension finie~~	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente.	~~Cas des séries matricielles.~~
Une série absolument convergente ~~d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie~~ est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Règle de d'Alembert.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone. Interprétation géométrique.
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La suite de référence est positive à partir d'un certain rang. Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

TABLE DES MATIÈRES

SÉRIES NUMÉRIQUES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES

1 Sommes partielles, convergence, divergence, somme

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \in \mathbb{K}$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre** n de la série $\sum u_n$.
$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.
Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarques

R 1 – Enlever un nombre fini de termes à S_n ne change pas sa convergence. Autrement dit, si I est fini, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n$ sont de même nature.

En effet, si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k\in[\![0,n]\!]\setminus I} u_k$ et si $n > \max I$, $S_n = \Sigma_n + \sum_{n\in I} u_n$. Lorsqu'elles sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus I} u_n + \sum_{n\in I} u_n$.

R 2 – Une série peut n'être définie que pour $n \geqslant n_0$, et on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ la série dans ce cas.

R 3 – Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc. Cependant, en général, c'est en étudiant son terme général u_n qu'on déduit des propriétés de la série.

R 4 – Ne pas confondre la série $\sum u_n$ (qui n'est pas une somme !) et le **nombre** (lorsqu'il existe) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{K}$ (qui n'est pas une somme !).

R 5 – ⚠ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'est pas une somme, c'est une limite.

Propriété : Séries géométriques

Si $q \in \mathbb{K}$, la série dite géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Lorsque c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Exemple : Série harmonique alternée

$\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente de somme $\ln 2$.

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

puis

$$|S_n - \ln 2| \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Autre preuve possible : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$.

2 Correspondance suite et séries

On a déjà vu qu'étudier la série de terme général u_n, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles. On a alors (avec $S_{-1}=0$)

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n = S_n - S_{n-1}}$$

Remarque

Inversement, une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être vue comme suite de sommes partielles d'une série de terme général u_n ?

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + u_1 \\ v_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 - v_0 \\ u_2 = v_2 - v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

Propriété

*Étudier la suite $(v_n)_n$, c'est étudier la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ (en posant $v_{-1}=0$) appelée **série télescopique**.*

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{-1} = v_n.$$ □

Corollaire

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$ □

Exemples

E 1 – Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de la somme.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La série est télescopique, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ donc la série est convergente, de somme 1.

E 2 – Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

La série est télescopique, $S_n = \ln(n+1) - 0 \to +\infty$ donc la série diverge.

Remarque

Dans la pratique, il est très rare qu'on prouve la convergence en calculant les sommes partielles et qu'on puisse calculer explicitement la somme de la série. Les séries géométriques et télescopiques en sont de rares exemples.

3 Espace vectoriel des séries convergentes

Propriété

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ alors $\sum_{k=0}^{n}(u_k + \lambda v_k) = S_n + \lambda \Sigma_n$. □

Remarques

R 1 – Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

R 2 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de $\sum(u_n + v_n)$.

R 3 – Si $\sum v_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(\lambda v_n)$ diverge si et seulement si $\lambda = 0$.

Propriété

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexe, elle converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent, et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}\, u_n$$

Remarque

Lorsqu'il y a convergence, $\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\mathfrak{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n)$.

4 Condition nécessaire de convergence, divergence grossière

Propriété : Divergence grossière

*Si $u_n \not\to 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.*

⚠ *La réciproque est fausse !*

*Si $u_n \to 0$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.*

Démonstration

$u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si (S_n) converge, $u_n \to 0$.

Contre-exemple : si $u_n = \frac{1}{n}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$: **série harmonique**.

$u_n \to 0$ mais $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
On verra plus tard que $H_n \sim \ln n$. □

5 Reste d'une série convergente

Définition

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On appelle **reste d'ordre n de la série $\sum u_n$** le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété

Avec les mêmes hypothèses, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$.

Démonstration

$S_N - S_n \to S - S_n = R_n$ lorsque $N \to +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ lorsque $N \to +\infty$ □

Exemple : Série géométrique

Si $|q| < 1$, $R_n = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété

Soit $\sum u_n$ *une série* ***convergente*** *et* R_n *son reste d'ordre* n, *alors* $R_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Démonstration

$R_n = S - S_n$. □

6 Un critère simple pour des séries à termes positifs

Propriété

Soit (u_n) *suite* ***réelle positive***, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. *Alors*

(i) (S_n) *est croissante*

(ii) (S_n) *à une limite finie ou* $+\infty$.

(iii) $\sum u_n$ *converge si et seulement si* (S_n) *est majorée.*

Démonstration

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

7 Séries alternées

Théorème : Critère Spécial sur des Séries Alternées

Si $u = (u_n)_n$ *est une suite* ***réelle*** *telle que*

H1 *u décroissante*

H2 $u_n \to 0$

alors $\sum (-1)^n u_n$ *est convergente.*

De plus, si on note $v_n = (-1)^n u_n$,

- *La somme* S *a le même signe que* $v_0 = u_0$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le reste d'ordre* n, R_n, *a le même signe que* v_{n+1} *et vérifie* $|R_n| \leqslant |v_{n+1}| = u_{n+1}$.

Exemple

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

II Convergence absolue

Définition

Une série $\sum u_n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite **absolument convergente** lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : convergence absolue ⇒ convergence

Si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum |u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.
La réciproque est fausse.

Démonstration

- **Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$** : On écrit $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

  Comme $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

  Donc, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.

- **Cas complexe** : $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$ convergent absolument car $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$ donc convergent.

Pour la réciproque fausse, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais elle ne converge pas absolument. □

Remarque

Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Propriété

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

III Séries à termes réels positifs

Les résultats de cette partie sont valables pour des séries à terme général réel positif. Cependant, l'étude étant asymptotique, ils s'appliquent plus généralement pour des séries à terme général positif à partir d'un certain rang.

Dans le cas où le terme général, est de signe constant (à partir d'un certain rang), on se ramène à un terme général positif quitte à étudier $\sum (-u_n)$ si le signe est négatif.

1 Comparaisons de termes généraux réels positifs

Théorème : Comparaison des séries à termes réels positifs : cas de convergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs**.*

Si $\sum v_n$ converge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\bullet\ u_n = \mathrm{O}(v_n), \qquad \bullet u_n = \mathrm{o}(v_n), \qquad \bullet \text{ apcr } u_n \leqslant v_n, \qquad \bullet u_n \sim v_n$$

alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Dans le premier cas, on a $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \ u_n \leqslant M v_n$.

Si S_n et Σ_n désignent respectivement les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors, tout étant positif, $S_n \leqslant S_{n_0} + M(\Sigma_n - \Sigma_{n_0})$ à partir du rang n_0. Comme $\sum v_n$ converge, (Σ_n) est majorée donc (S_n) majorée donc $\sum u_n$ converge.

Les trois autres cas sont des cas particuliers du premier. □

Corollaire : Comparaison des séries à termes positifs : cas de divergence

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**.*
Si $\sum u_n$ diverge et que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

$$\bullet\ u_n = \mathrm{O}(v_n), \quad \bullet\ u_n = \mathrm{o}(v_n), \quad \bullet \text{ apcr } u_n \leqslant v_n, \quad \bullet\ u_n \sim v_n$$

alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Contraposée du théorème. □

Exemples

E 1 – $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ terme général d'une série (géométrique) convergente.

E 2 – $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car à termes positifs et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ terme général d'une série (télescopique) convergente. (On peut montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

E 3 – $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car à terme positif et si $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Propriété

*Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes réels positifs** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Démonstration

Symétrie de l'équivalence. □

Remarques

R 1 – Attention, pour les autres relations de comparaisons, ce n'est pas une équivalence ! Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $\sum u_n$ converge, on ne peut rien dire de $\sum v_n$ en général.

Exemple

$\frac{1}{n^2} = \mathrm{O}(1)$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge mais $\sum 1$ diverge.

R 2 – Plus généralement, pour des séries réelles, il suffit que l'une des deux soit de signe constant à partir d'un certain rang, l'autre aura alors le même signe par équivalence et le résultat reste vrai.

Exemples

E 1 – $\sum \frac{1}{n}$ diverge car à termes positifs $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ terme général d'une série (télescopique) divergente.

E 2 – $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ converge car $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc à termes positifs à partir d'un certain rang et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente. $\sum \sin \frac{1}{n^3}$ converge et $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Méthode : Utilisation pour des séries quelconques

On compare $|u_n|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, c'est dire que $|u_n| = \mathrm{o}(v_n)$ ou que $|u_n| = \mathrm{O}(v_n)$.

Si $|u_n| = \mathrm{o}(v_n)$ ou $\mathrm{O}(v_n)$ ou $\leqslant v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

2 Critère de d'Alembert

Propriété : Critère de d'Alembert

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0, +\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Démonstration

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 = \frac{1}{1}$ avec $\sum 1$ divergente donc il y a divergence (grossière). (En fait, $u_n \to +\infty$!)
- Si $\ell < 1$ et $\ell < k < 1$, à partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ donc $u_n \leqslant k^{n-N} u_N$ avec $\sum k^n$ convergente. Donc, comme tout est positif, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, on ne peut rien dire en général. Exemple : $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$. □

Exemple : CCINP 6

Convergence de $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ de deux façons différentes. Autre justification possible : termes positifs et d'après la formule de Stirling, $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, donc $\dfrac{n!}{n^n} \sim \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées.

3 Comparaison série-intégrale

a Comparaison et caractérisation de convergence

Propriété : Comparaison série-intégrale d'une fonction décroissante

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroît et est continue par morceaux alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si f est continue par morceaux sur $[p-1, n]$.

Remarques

R 1 – Il est interdit d'apprendre ces formules par cœur. Le plus important est de savoir les retrouver sur un dessin.

R 2 – On peut aussi faire une comparaison série-intégrale dans le cas d'une fonction croissante.

Propriété

*Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante, **positive** et continue par morceaux alors*

(i) $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge.

(ii) Si $w_n = \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$, alors $\sum w_n$ converge.

Démonstration

(i) $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge si et seulement si elle est majorée si et seulement si S_n est majorée si et seulement si $\sum f(n)$ converge car ces suites sont croissantes.

(ii) Par comparaison à série intégrale, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n-1)$ donc $0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n)$.
Or le théorème de la limite monotone nous dit que $(f(n))$ converge, donc par comparaison à une série télescopique à termes positifs, $\sum w_n$ converge. □

Remarque

En cas de convergence, si on note $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, on a en outre

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b Séries de Riemann

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Démonstration

Si $\alpha \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
Si $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

a une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, décroissante, et continue, on obtient le résultat.

Pour $\alpha = 1$, cela a déjà été vu et se retrouve avec $\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n \to +\infty$. □

Exemple : Équivalent de la somme partielle harmonique

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Les hypothèses de la comparaison séries-intégrales étant vérifiées $\sum w_n$ converge avec $w_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$ soit $\frac{1}{n} = \ln n - \ln(n-1) - w_n$.

En sommant, on a $H_n = \ln n - W_n - \ln 2$ où $-W_n - \ln 2 = \sum_{k=1}^n w_k - \ln 2 \to \gamma \in \mathbb{R}$.

Donc $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. γ est appelée constante d'Euler.

Cela permet de retrouver le fait que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$.

Remarques

R 1 – On pose pour $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$. ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

R 2 – Règle du $n^\alpha u_n$: Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée (par exemple $n^\alpha u_n \to 0$), alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha, \ell \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples

E 1 – $u_n = \dfrac{\cos n}{n^3}$.

E 2 – $u_n = \mathrm{e}^{-n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

E 3 – $u_n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$.

E 4 – $u_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$.

E 5 – $u_n = \dfrac{\operatorname{Arctan} n}{\sqrt{n+1}}$

c Séries de Bertrand

Méthode : Séries de Bertrand

Il s'agit des séries de terme général $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant 0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hors programme, mais très classique.

Intuitivement, le terme en $\ln$ n'a pas une grande influence, donc le comportement correspond à celui d'une série de Riemann, sauf dans le cas limite où $\alpha = 1$, dans lequel le terme en $\ln$ peut permettre daccélérer la convergence du terme général vers 0 et rendre la série convergente à condition que $\beta > 1$.

On montre donc que $\boxed{\text{la série converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$

- Si $\alpha < 0$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \leqslant 0$, il y a divergence grossière.
- Si $\alpha < 1$ (englobe le cas précédent), ou si $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, avec $\gamma \in]1, \alpha[$, $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc par comparaison de termes généraux positifs et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ étant convergente, $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on obtient la nature de la série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exemple

CCINP 5

d Évaluation des sommes partielles et des restes

Exemples : Cas de divergence

E 1 – Divergence et équivalent des sommes partielles de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n \ln n}$: $f : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. Soit avec le w_n, soit : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_2^n \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} + \int_2^n \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_2^n \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} + \int_2^n \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln(2))$$

Donc $\sum\limits_{k=2}^n \dfrac{1}{k \ln k} \to +\infty$.

En fait, on a obtenu mieux que cela : $\sum\limits_{k=2}^n \dfrac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

E 2 – **Très classique :** $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Par comparaison série-intégrale,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln n$$

donc $H_n \sim \ln n$.
Puis, si $v_n = H_n - \ln n$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

terme général d'une série convergente, donc $v_n = H_n - \ln n \to \gamma \in \mathbb{R}$ où γ est appelé constante d'Euler.

$$H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

E 3 – Équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^\alpha$ où $\alpha > 0$.

Remarque

Plus généralement avec les hypothèses précédentes, si $\sum f(n)$ diverge et $f(n) \to 0$, $S_n \sim F(n)$ où F primitive de f.

Exemple : Cas de convergence

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On cherche une estimation de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Par comparaison à une intégrale,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

puis en faisant $N \to +\infty$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}$$

et $R_n \sim \frac{1}{n}$ (convergence lente.) Pour une précision de 10^{-2} dans le calcul de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, il faut prendre $n = 100$.

Peut-on faire mieux ? Oui ! On a aussi

$$\left| S - \left(S_n + \frac{1}{n}\right) \right| = \left| R_n - \frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

En considérant $S_n + \frac{1}{n}$, on obtient une convergence en $\frac{1}{n^2}$. Cette fois $n = 10$ suffit ! On parle de technique d'accélération de convergence.

Remarque

Plus généralement avec les hypothèses précédentes, si $\sum f(n)$ converge de reste R_n, $I = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$,

$$I - I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I - I_n$$

ce qui permet d'avoir une estimation asymptotique de R_n.

IV FORMULE DE STIRLING

Théorème : Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration

- **Première étape** : On montre que $n! \sim K(n/\mathrm{e})^n\sqrt{n}$ avec $K>0$.

  Soit $u_n = \dfrac{n!}{(n/\mathrm{e})^n\sqrt{n}}$. L'idée est de démontrer que $(\ln u_n)$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \sum \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Or
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)^{n+1/2}}$$
  donc
  $$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
  Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\ln u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \mathrm{e}^{\ell} = K$ d'où le résultat.

- **Deuxième étape** : Pour déterminer K, on utilise le résultat classique des intégrales de Wallis : si $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$, alors $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$, puis (I_n) décroît, puis $I_{n+1} \sim I_n$, puis $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, puis $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et
  $$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2}\,\frac{\pi}{2} \sim \frac{K\pi(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{2\cdot 4^n K^2 n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}n} = \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

d'où $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}$ puis $K \sim \sqrt{2\pi}$ donc $K = \sqrt{2\pi}$. □

V Sommation des relations comparaison

1 Cas de divergence

Théorème

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.*

On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $\Sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim \Sigma_n$.

Remarque

C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Démonstration

C'est le même principe que pour le théorème de Césaro. Comme $\Sigma_n \to +\infty$, on a un rang N_0 à partir duquel $\Sigma_n > 0$.

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant Mv_n$.
Si $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + M(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant |S_N| + M\Sigma_n$.
Or $\Sigma_n \to +\infty$, donc on a un rang N' tel que si $n \geqslant N'$, $|S_N| \leqslant \Sigma_n$.
Ainsi, pour $n \geqslant \max(N, N')$, $|S_n| \leqslant (M+1)\Sigma_n$ et $S_n = \mathrm{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}v_n$.
Si $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + \frac{\varepsilon}{2}(\Sigma_n - \Sigma_N) \leqslant |S_N| + \frac{\varepsilon}{2}\Sigma_n$.
Si $n \geqslant \max(N, N_0)$, $\frac{|S_n|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{|S_N|}{\Sigma_n} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Et enfin $\frac{|S_N|}{\Sigma_n} \to 0$ donc on a un rang N' à partir duquel $\frac{|S_N|}{\Sigma_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, si $n \geqslant \max(N, N_0, N')$, $|S_N| \leqslant \varepsilon\Sigma_n$ et $S_n = \mathrm{o}(\Sigma_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$. Soit $T_n = S_n - \Sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k = \mathrm{o}(\Sigma_n)$ par (ii).
Donc $S_n \sim \Sigma_n$. □

Exemples

E 1 – Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ terme général positif d'une série divergente, donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sum_{k=0}^{n} u_n = 2\sqrt{n+1} - 0 \sim 2\sqrt{n}$.

Se trouve aussi par comparaison série-intégrale.

E 2 – Redémontrer le théorème de Césaro.

Si $u_n \to \ell$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. On veut montrer que $v_n \to \ell$ soit $v_n - \ell = \mathrm{o}(1)$.

Or $u_n - \ell = \mathrm{o}(1)$ et 1 est un terme général positif de série divergente. Donc $\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \mathrm{o}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \mathrm{o}(n)$ soit encore, en divisant par n, $v_n - \ell = \mathrm{o}(1)$.

2 Cas de convergence

Théorème

*Soient $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.*

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n \sim \rho_n$.

Remarque

C'est encore valable si $v_n \geqslant 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Démonstration

(i) On a $M \in \mathbb{R}^+$ et un rang N tel que si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant M v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Si $n, p \geqslant N$, $\left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{p} v_k$. Puis, en faisant $p \to +\infty$, $|R_n| \leqslant M\rho_n$ donc $R_n = \mathrm{O}(\rho_n)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Avec le même calcul en remplaçant M par ε, si $n \geqslant N$, $|R_n| \leqslant \varepsilon\rho_n$ donc $R_n = \mathrm{o}(\rho_n)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| \sim v_n$ et $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

$w_n = u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$ donc $\sum w_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - v_k) = \mathrm{o}(\rho_n)$.

Or, si $p \geqslant n$, $\sum_{k=n+1}^{p}(u_k - v_k) = \sum_{k=n+1}^{p} u_k - \sum_{k=n+1}^{p} v_k$ donc, en faisant $p \to +\infty$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - v_k) = R_n - \rho_n = \mathrm{o}(\rho_n)$ et donc $R_n \sim \rho_n$.

□

VI Produit de Cauchy

Définition : Produit de Cauchy

Soient $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

La série de terme général w_n est appelée **produit de Cauchy** de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Remarque

Il s'agit d'une sommation par diagonales.

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum w_n$ l'est aussi. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exemple

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp z \times \exp z'$.

En effet, les séries de termes généraux $\frac{z^n}{n!}$ et $\frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

L'argument se transporte aux éléments d'une algèbre de dimension finie (donc par exemple aux matrices) avec une hypothèse de commutation pour la formule du binôme (et une version admise du produit de Cauchy) : si $ab = ba$, $\exp(a+b) = \exp a \exp b$.

Démonstration

Cas où $u, v \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ On pose U_N, V_N et W_N les sommes partielles.

Dessin : $I \subset J \subset K$ où
- I est le carré des couples (p,q) tels que $p, q \in [\![0, N]\!]$
- J est le triangle des couples (p,q) tels que $p+q \leqslant 2N$
- K est le carré des couples (p,q) tels que $p, q \in [\![0, 2N]\!]$

Alors $\sum_{(p,q)\in I} u_p v_q = U_N V_N \leqslant \sum_{(p,q)\in J} u_p v_q = W_{2N} \leqslant \sum_{(p,q)\in K} u_p v_q = U_{2N} V_{2N}$ car les termes sont positifs.

Par encadrement, on en déduit que W_{2N} converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Mais comme (W_n) est croissante, $W_{2N} \leqslant W_{2N+1} \leqslant W_{2N+2}$ donc par encadrement, W_{2N+1} converge vers la même limite.

Finalement, $\sum w_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Cas général Le premier cas permet de voir que $\sum c_n$ converge avec $c_n = \sum_{p+q=n} |u_p v_q|$. On note C_N la somme partielle ainsi que A_N et B_N les sommes partielles des séries de terme général $|u_n|$ et $|v_n|$.

Mais $|w_n| \leqslant c_n$ par inégalité triangulaire, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum w_n$ converge absolument.

Puis $|U_N V_N - W_N| = \left| \sum_{(p,q)\in L} u_p v_q \right|$ où L est le triangle des $p, q \in [\![0, N]\!]$ tels que $p+q > N$.

Donc $|U_N V_N - W_N| \leqslant \sum_{(p,q)\in L} |u_p| |v_q| = A_N B_N - C_N \to 0$ d'après le premier cas.

□

Exemple

Si $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, alors $\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a^n$.

En effet, c'est le produit de Cauchy de la série géométrique absolument convergente de terme général a^n avec elle-même.

Remarque

L'hypothèse d'absolue convergence est indispensable, le résultat n'est pas assuré pour des séries semi-convergentes.

Exemple

Si $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, alors $|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$. Donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.

VII Développement décimal illimité (rappels de MPSI)

Théorème

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = N + 0{,}a_1 a_2 \ldots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.

On a en outre $N = \lfloor x \rfloor$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$.

Définition

Une telle écriture est appelée **développement décimal illimité propre** de x.

Démonstration : Non exigible.

Remarquons qu'une telle série converge bien ($\mathrm{O}\left(10^{-n}\right)$).

De plus, si on considère cette série, et si l'on note $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x), alors on sait déjà que $x_n \to x$.

Or $\dfrac{a_n}{10^n} = x_n - x_{n-1}$ donc la série est télescopique de somme $x - x_0 = x - \lfloor x \rfloor$.

De plus, la suite $(a_n)_n$ ne stationne pas sur 9 . Sinon, on considérant p tel que $10^p x$ a une partie décimale ne contenant que des 9, on obtient que $10^p x = 1$ donc $x = 10^{-p}$ et ainsi, si $n > p$, $a_n = \left\lfloor 10^n x \right\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor = 0$, ce qui est contradictoire.

Cela donne l'existence.

Lemme

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 1$ avec pour tout n, $b_n \in [\![0,9]\!]$, alors, pour tout n, $b_n = 9$.

Démonstration

Soit $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots \in [0,1]$ tel que tous les b_n ne soient pas égaux à 9. Montrons que $x < 1$.

Soit n_0 le plus petit entier tel que $b_{n_0} \neq 9$ (donc $x = 0{,}99\cdots 9 b_{n_0} b_{n_0+1} \cdots$) et

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-n_0} = 0, b_1 \cdots b_{n_0-1} 9 = 0{,}\underbrace{9\cdots 9}_{n_0 \text{ fois}}.$$

Alors $1 - x_0 = 10^{-n_0} > 0$ et comme $b_{n_0} \neq 9$, $x \leqslant x_0 < 1$. □

Pour l'unicité, si on a un telle écriture, alors

$$10^n x = 10^n N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} = 10^n N + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}}$$

avec $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} \leqslant 1$. Par hypothèse et d'après le lemme, on a en fait $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-n}} < 1$, et on obtient $\left\lfloor 10^n x \right\rfloor = 10^n N + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}$ ce qui redonne facilement $a_n = \left\lfloor 10^n x \right\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor$.

$N = \lfloor x \rfloor$ en utilisant le lemme également. □

Remarque

Les seuls nombres réels à avoir deux développements décimaux illimités sont les nombres décimaux (d'après le lemme).