CHAPITRE

Suites numériques (MPSI)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}\right.$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS** u_n **!!!**.

I Cas des suites réelles

1 Limites

Définition : Limite

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$
ou de manière équivalente
$$\forall A \geqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$
On note alors $u_n \to +\infty$.
- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \to +\infty$ soit
$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$
ou de manière équivalente
$$\forall B \leqslant 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$
On note alors $u_n \to -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

*Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.*

Propriété

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors
- *Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.*
- *Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.*

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- *$v \to \ell$*
- *$w \to \ell$*
- *apcr $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- *$v \to +\infty$*
- *apcr $u_n \geqslant v_n$*

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- *$w \to -\infty$*
- *apcr $u_n \leqslant w_n$*

alors $u \to -\infty$.

3 Opérations sur les limites

Propriété

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

Propriété

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,
- *$u + v \to \ell_1 + \ell_2$*
- *$uv \to \ell_1 \ell_2$*

Remarque

Dans les cas douteux, il peut se passer tout et n'importe quoi.

Par exemple, pour $0 \times (+\infty)$:
- $\frac{1}{n} \times n^2 \to +\infty$
- $\frac{\alpha}{n} \times n \to \alpha$
- $\frac{-1}{n} \times n^2 \to -\infty$
- $\left(\frac{(-1)^n}{n} \times n\right)$ n'a pas de limite.

Propriété

- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$*
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.*
- *Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to -\infty$.*

Propriété : Convergence des suites géométriques réelles

Soit $q \in \mathbb{R}$.
- *Si $q = 1$, $q^n \to 1$.*
- *Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.*
- *Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.*
- *Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.*

II Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).

De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si
- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Exemples

E 1 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

E 2 – Si $x \in \mathbb{R}$, les suites d'approximation décimale par défaut et par excès $(d_n(x))$ et $(D_n(x))$ sont adjacentes.

Propriété

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Remarque

On a alors pour tout n, $|u_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n| = v_n - u_n$ ce qui donne des information intéressante sur la **vitesse de convergence** : plus $v - u$ converge rapidement vers 0, plus u converge rapidement vers ℓ.

Cela permet aussi de connaître un rang à partir duquel u_n est une approximation de ℓ à une précision donnée.

Exemples

E 1 – Approximations décimales :

$$|d_n(x) - x| \leqslant D_n(x) - d_n(x) = 10^{-n}$$

Convergence très rapide (au moins exponentielle).

Si on veut n décimales, on calcule $d_n(x)$ (évidemment !).

E 2 – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Vu le calcul précédent, pour tout n, $\left|S_n - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{1}{n}$. La converge est (au moins) en $\frac{1}{n}$ donc plutôt lente.

Si on veut n décimales, on calcule... S_{10^n} !

E 3 – **Dichotomie** : On construit des segments emboîtes en divisant leur taille par 2 à chaque étape : $I_0 = [a, b]$, pour tout n, $I_{n+1} \subset I_n$ avec $\ell(I_{n+1}) = \frac{\ell(I_n)}{2}$, avec $I_n = [a_n, b_n]$.

Alors $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et la convergence de (a_n) et (b_n) vers ℓ est au moins en $\frac{b-a}{2^n}$ donc très rapide.

III Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Propriété

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \geqslant \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \to \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

IV Extension aux suites complexes

Notation

Soit $z=(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{Re}(z)=(\mathfrak{Re}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{Im}(z)=(\mathfrak{Im}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{z}=(\overline{z_n})\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $|z|=(|z_n|)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell\in\mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n-\ell|\to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall\,n\geqslant N,\ |z_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Remarque

Pas de limite infinie dans $\mathbb{C}$. On peut au mieux avoir $|z_n|\to+\infty$.

Propriété

Soit $(z_n)\in\mathbb{C}^n$ et $\ell\in\mathbb{C}$.

$$z_n\to\ell\iff \mathfrak{Re}\,z_n\to\mathfrak{Re}\,\ell \text{ et } \mathfrak{Im}\,z_n\to\mathfrak{Im}\,\ell$$

Définition

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall\,n\in\mathbb{N},\ |z_n|\leqslant M$.

Propriété : Suites géométriques complexes

Soit $q\in\mathbb{C}$.
- *Si $q=1$, $q^n\to 1$.*
- *Si $|q|<1$, $q^n\to 0$.*
- *Si $|q|>1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.*
- *Si $|q|=1$ et $q\neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.*

Remarque

En particulier, si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ divergent. En effet, si l'une convergeait, à l'aide de $\cos((n+1)\theta)$ ou $\sin((n+1)\theta)$, on obtient que l'autre converge aussi et alors $\left(e^{in\theta}\right)$ convergerait également.

V Suites récurrentes

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall\,n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f:D\to\mathbb{R}$.

Propriété

Si $u_n\to\ell\in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell)=\ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Méthode

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** $f:I$ tel que $f(I)\subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0}\in I$, la suite est bien définie et $\forall\,n\geqslant n_0,\ \ u_n\in I$.
  Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x)=f(x)-x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - ⋆ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - ⋆ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0}\in I$, alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0}\leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right)\geqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
    $$u_n=f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right)\leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right)=u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0}\geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right)\leqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
    $$u_n=f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right)\geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right)=u_{n+1}.)$$
  - ⋆ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0}\in I$, alors $(u_{2n})_{n\geqslant\frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant\frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1}=f\circ f(v_n)$ avec $f\circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f\circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

Exemple

$$u_0\in\mathbb{R} \text{ et } \forall\,n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=\frac{u_n^2+8}{6}.$$

2 Cas d'une fonction contractante

Définition

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a,b]$ si et seulement si on a $k<1$ tel que $\forall\,x,x'\in[a,b],\ \ \left|f(x)-f(x')\right|\leqslant k\left|x-x'\right|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont pas trop élevées ».

Méthode

Cela est interessant si $I=[a,b]$ est stable par f. Si c'est le cas, si $\ell \in [a,b]$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in [a,b]$ stable par f, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n-\ell| = \left|f(u_{n-1})-f(\ell)\right| \leqslant k|u_{n-1}-\ell| \leqslant \cdots \leqslant k^n|u_0-\ell| \to 0$$

Donc directement $u_n \to \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soit $f: I \to \mathbb{R}$, avec $a<b$. On suppose que

- **H1** *f est continue sur I*
- **H2** *f est dérivable sur $\mathring{I}$*
- **H3** *On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathring{I},\ \ \left|f'(t)\right| \leqslant k$.*

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall x, x' \in [a,b],\ \ \left|f(x)-f(x')\right| \leqslant k\left|x-x'\right|.$$

Remarque

On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f de classe $\mathscr{C}^1$, alors

- si $\left|f'(\ell)\right|<1$, le point fixe est **attractif**, en particulier si $f'(\ell)=0$ (point **superattractif**), la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton,
- si $\left|f'(\ell)\right|>1$, le point fixe est **répulsif**,
- si $\left|f'(\ell)\right|=1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exemple

$u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2+\dfrac{1}{u_n^2}$.

VI Relations de comparaison

1 Définition

Définition

Si $u,v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathrm{O}(v)$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.

Remarques

R 1 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n = v_n \times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\to 0, 1$).

R 2 – ⚠ $u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathrm{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

Exemple

$n = \mathrm{o}\left(n^3\right)$ et $n^2 = \mathrm{o}\left(n^3\right)$ mais $n \neq n^2$!

R 3 – $u = \mathrm{O}(v)$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant K|v_n|$.

$u = \mathrm{o}(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|$.

R 4 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

R 5 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

Propriété : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha>0$, $\beta>0$, $q>1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n\ln n \ll n^2$.

Propriété

$$u \sim v \iff u = v + \mathrm{o}(v)$$

2 Propriétés

Propriété : Propriétés de o et O

Soient $u,v,w,a,b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v,w,b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\alpha \neq 0$, $u = \mathrm{o}(\alpha v) \implies u = \mathrm{o}(v)$ et $u = \mathrm{O}(\alpha v) \implies u = \mathrm{O}(v)$.

(ii) $u = \mathrm{o}(1) \iff u \to 0$ et $u = \mathrm{O}(1) \iff u$ bornée.

(iii) Si $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathrm{O}(v)$ et la réciproque est fausse.

*(iv) **Transitivité***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \implies u = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathrm{O}(v) \text{ et } v = \mathrm{O}(w) \implies u = \mathrm{O}(w)$$

*(v) **Combinaison linéaire***

$$u = \mathrm{o}(w) \text{ et } v = \mathrm{o}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathrm{o}(w)$$

$$u = \mathrm{O}(w) \text{ et } v = \mathrm{O}(w) \Longrightarrow \alpha u + \beta v = \mathrm{O}(w)$$

(vi) ***Produit***

$$u = \mathrm{o}(v) \text{ et } a = \mathrm{o}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{o}(vb)$$

$$u = \mathrm{O}(v) \text{ et } a = \mathrm{O}(b) \Longrightarrow ua = \mathrm{O}(vb)$$

Propriété : Propriétés de ~

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne sannulant pas à partir d'un certain rang.

(i) *$\sim$ est une relation d'équivalence.*
(ii) *Si $u \sim v$ et $v \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, alors $u \to \ell$.*
(iii) *$u \to \ell \boxed{\neq 0} \Longleftrightarrow u \sim \ell$.*
(iv) *Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*
(v) *Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\dfrac{u}{a} \sim \dfrac{v}{b}$.*
(vi) *Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.*
(vii) *Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

Remarques

R 1 – ⚠ $u_n \sim v_n \not\Longleftrightarrow u_n - v_n \to 0$

R 2 – ⚠ Si α n'est pas fixe : $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$ donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R 3 – ⚠ On n'ajoute pas les équivalents.

R 4 – ⚠ Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé ! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)

Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

En particulier, si $u_n \to 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R 5 – ⚠ On ne compose pas des équivalents par la gauche avec des fonctions, même continues.

- $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n} \Longleftrightarrow u_n - v_n \to 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1,}$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exemple : Très classique !

Détermination d'un équivalent de l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

- Relation de récurrence,
- Expression de I_n
- Décroissance,
- $I_n \sim I_{n-1}$,
- nI_nI_{n-1} constant,
- Équivalent de I_n.

3 Équivalents usuels

Propriété : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Exemple

$$u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Propriété : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \to 0$.

- $\sin h_n \sim h_n$
- $\cos h_n - 1 \sim -\dfrac{h_n^2}{2}$
- $\tan h_n \sim h_n$
- $\ln(1+h_n) \sim h_n$
- $\mathrm{e}^{h_n} - 1 \sim h_n$
- $\operatorname{Arcsin} h_n \sim h_n$
- $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
- $\operatorname{sh} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{Arctan} h_n \sim h_n$
- $\operatorname{th} h_n \sim h_n$

Remarque

Lorsque l'on est au voisinage de a, on se ramène en général au voisinage de 0 en posant $x = a + h$ si a est fini et $x = \frac{1}{h}$ si a est infini.

Exemple

Limite de $u_n = n\left(\left(1 - \sin\dfrac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$.

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(r)} + \mathrm{o}\left(v_n^{(r)}\right)$$

où $v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}$ sont des suites telles que

$v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \cdots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall\, k \in [\![1, r-1]\!],\ \ v_n^{(k+1)} = \mathrm{o}\left(v_n^{(k)}\right)$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $v_n^{(r)}$.

Remarques

R 1 – On a toujours que $u_n - v_n^{(1)} - \cdots - v_n^{(r)} \sim v_n^{(k+1)}$. C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

R 2 – On peut adapter la définition précédente pour des fonctions au voisinage d'un point : c'est une généralisation du développement limité.

Méthode

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + \mathrm{o}(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

Exemples

E 1 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : n \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{n^2+2n+4}}$ à la précision $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n}$.

E 2 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \longmapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x}. Asymptote ?

E 3 – Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

E 4 – On s'intéresse à u_n unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{n}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, majorée par -1 et croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).

VII Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_n = u_{\varphi(n)}$.

φ est appelée **extractrice**.

Lemme

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété

Si $u \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $\mathbb{K}$) de suite extraite de u.

Exemple

Valeurs d'adhérence de $(-1)^n$.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Remarque

Réciproque fausse.

Exemple

$u_n = n$ si n est pair et 0 sinon.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème : de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

VIII Exercices CCINP

Exercice

CCINP 1 et 43.