

Exercice n°62 :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1) M est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable.

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & X - \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\underline{L_1} \leftarrow \underline{L_1} + \underline{L_2} + \underline{L_3} \quad \text{c ?}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} X - 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ X - 1 & X - \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ X - 1 & -\frac{5}{12} & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ &= (X - 1) \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & X - \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} \\ 1 & -\frac{5}{12} & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{L_2} \leftarrow \underline{L_2} - \underline{L_3}$$

$$\begin{aligned} &= (X - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & X + \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 1 & -X - \frac{1}{12} & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ &= (X - 1) \left(X + \frac{1}{12} \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -\frac{5}{12} \\ 1 & -1 & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ &= (X - 1) \left(X + \frac{1}{12} \right) \left(\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & X - \frac{1}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{12} \end{vmatrix} \right) \\ &= (X - 1) \left(X + \frac{1}{12} \right) \left(X - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc: $1, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}$.

$$M - \text{Id} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \text{ donc } E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$M + \frac{1}{12} \text{Id} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

$$C_2 - C_3 = 0 \text{ donc } E_{\frac{1}{12}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$M - \frac{1}{4}Id = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$2C_1 - C_2 - C_3 = 0 \text{ donc } E_{\frac{1}{4}}(M) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

$$2) M^n = PD^nP^{-1}$$

$$\text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{12})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } (-\frac{1}{12})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } (\frac{1}{4})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{La suite } (M^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge donc vers } P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On calcule donc P^{-1} :

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\gamma \\ y = \alpha + \beta - \gamma \\ z = \alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \beta = 0x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \gamma = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \end{cases}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On a alors:

$$M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ On a } N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = N \text{ donc } u \text{ est un projecteur.} \quad \checkmark$$

De plus, $C_1 - C_2 = 0$ et $C_2 - C_3 = 0$

$$\text{donc Ker}(u) \overset{\text{dim?}}{\equiv} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u)) = 1$ donc $\text{Im}(u) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$
se voit sur la matrice!

Donc u projection sur ... // $\vec{a}$...