Exercice 149 : TPE 2017

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\right||x|^{n+1}}{\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right||x|^n} = \dfrac{n-1}{n+1}|x| \to |x|$

   Donc par critère de d'Alembert, $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$, donc $R = 1$.

2. D'après la question 1, on a que la série converge pour tout $x \in \left]-1;1\right[$,

   On a $f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

   Et $f'(x) = \sum_{n=\cancel{3}2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=\cancel{2}1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=\cancel{2}1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = ln(1+x)$ là, ok.

   Donc en primitivant sur le disque de convergence, on obtient :

   $f(x) = f(0) + (1+x)\ln(1+x) - 1 - x$ avec $f(0) = 0$ Non : On obtient $f(0) = f(0) - 1$!

   Donc $f(x) = (1+x)\ln(1+x) \cancel{-1} - x$

3. On a $\left]-1;1\right[\subset D$

   Pour $x = 1, \forall n \geq 2,\ a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

   On a $\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)_n$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$, donc par TSSA on a $\sum_{n\geq 2} a_n$ qui converge

   Donc $\left]-1;1\right[\subset D \subset [-1;1]$

   Pour $x = -1, \forall n \geq 2,\ b_n = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$, or $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann, donc $\sum_{n\geq 2} b_n$ converge

   Donc $D = [-1;1]$

   Donc $f(1)$ *et* $f(-1)$ existent

   Et $f(1) = 2ln(2) - \cancel{2}1$ Pourquoi ? ($C^{té}$ à justifier par CVU par TSSA...)

   Et $\lim\limits_{x\to-1} (1+x)\ln(1+x) = 0$, donc avec un prolongement par continuité $\cancel{f(-1) = -2}$

   Pas de $c^{té}$ a priori en -1. Il faut le justifier

   mais $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ est télescopique...

   $= 1$ (et donc, effectivement, non C°).