Exercice n°36 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) A est une matrice nilpotente non nulle donc A n'est pas diagonalisable.

2) On a $B^2 = A$ or $A^3 = 0$ donc $B^6 = 0$.
B est donc nilpotente.
On a alors $\chi_B = X^3$ car B est nilpotente en dimension 3. donc $B^3 = 0$.
Ainsi, on a d'une part :
$B^4 = B^2 \times B^2 = A^2$
D'autre part :
$B^4 = B^3 \times B = 0$
Or $A^2 \neq 0$
On obtient alors une contradiction donc il n'existe pas de matrice B $\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$

3) Soit la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle A s'écrit : A $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rapide mais ok.

Dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$, la matrice A s'écrit : A $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$