53 **Mines-Télécom 2018** Soit $E=\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f\in E$, on définit la fonction $\Phi(f):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par $\Phi(f)(0)=f(0)$ et, pour tout $x>0$,

$$\Phi(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

Solution de 53 : Mines-Télécom 2018

1. La linéarité de Φ provient de celle de l'intégrale (pour toutes $f,g\in E$, et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\Phi(f+\lambda g)=\Phi(f)+\lambda\Phi(g)$) et le théorème fondamental de l'analyse nous assure, avec l'hypothèse de continuité de f, que Φ l'est.
2. On cherche à résoudre, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'équation $(E):\Phi(f)=\lambda f$ d'inconnue $f\in E$.
   En évaluant en 0, on obtient d'emblée qu'alors $\lambda=1$ ou $f(0)=0$.
   On note $F:x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f qui s'annule en 0.
   Cas $\lambda=0$ L'équation (E) est équivalente à pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, $F(x)=0$, puis $f\equiv 0$ car $F'=f$, donc 0 n'est pas valeur propre.
   Cas $\lambda\notin\{0,1\}$ L'équation (E) est équivalente à $f(0)=0$ et pour tout $x>0$,
   $$F(x)=\lambda x f(x)=\lambda x F'(x).$$
   On est alors amené à résoudre l'équation $y'=\dfrac{y}{\lambda x}$ sur $]0,+\infty[$, dont les solutions sont les $x\mapsto\alpha\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\lambda}}=\alpha x^{1/\lambda}$.
   L'équation (E) est alors équivalente à $f(0)=0$ et il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{\alpha}{\lambda}x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ soit $f(0)=0$ et il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=C\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\ln x}$.
   La condition de continuité en 0^+ impose que soit $\dfrac{1}{\lambda}-1>0$ et C est quelconque, soit $C=0$ et alors λ n'est pas valeur propre.
   Cas $\lambda=1$ La résolution est la même, mais on n'a plus la contrainte $f(0)=0$. L'équation (E) est alors équivalente à l'existence d'un $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x>0$, $f(x)=C$ et donc au fait que f soit constante sur $[0,+\infty[$ par continuité.

   Finalement, les valeurs propres sont exactement les $\lambda\in]0,1]$, de sous-espaces propres associés les $\mathrm{Vect}\left(x\mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$ (tous des droites).