CHAPITRE

Révision de MPSI : Décomposition en éléments simples

1 Décomposition en éléments simples

a Partie entière

Définition - Propriété

Soit $F\in\mathbb{K}(X)$. On note $\mathbb{K}^-(X)=\{F\in\mathbb{K}(X)\mid \deg F<0\}$. Il existe un unique couple $(Q,G)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}^-(X)$ tel que $F=Q+G$. Q est appelé **partie entière** de F.

Remarques

- **R1 –** La partie entière est le quotient de la division euclidienne du numérateur par la dénominateur.
- **R2 –** C'est l'analogue de la partie entière sur $\mathbb{Q}$.
- **R3 –** Si $\deg F<0$, alors sa partie entière est nulle.
- **R4 –** Si $F\in\mathbb{K}[X]$, sa partie entière est F elle-même.
- **R5 –** $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^-(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}(X)$.

b Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$, $F=\dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ pôles de F d'ordre $m_1,\dots,m_n$: $F=\dfrac{A}{\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}}$ et $Q\in\mathbb{C}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe une unique famille $(\lambda_{k,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m_k}}$ de nombres complexes telle que

$$F=\underbrace{Q}_{\text{partie entière}}+\underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1}+\cdots+\frac{\lambda_{1,m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}}}_{\text{partie polaire associée à }\alpha_1}+\cdots+\underbrace{\frac{\lambda_{n,1}}{X-\alpha_n}+\cdots+\frac{\lambda_{n,m_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}}}_{\text{partie polaire associée à }\alpha_n}$$

Remarque

Les $\dfrac{1}{(X-a)^n}$ pour $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ forment une base de $\mathbb{C}^-(X)$.

Propriété : Partie polaire relative à un pôle simple

Si α pôle simple de $F=\dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\dfrac{\lambda}{X-\alpha}$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$ la partie polaire associée à α. Alors $F=\dfrac{A}{(X-\alpha)B_1}$ avec $B_1(\alpha)\neq 0$ et

$$\lambda=[\widehat{(X-\alpha)}F](\alpha)=\frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}=\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Exemples : Le « cache »

- **E1 –** $F=\dfrac{1}{(X-1)(X+2)}=\dfrac{1/3}{X-1}+\dfrac{-1/3}{X+2}$.
- **E2 –** *Très classique* : $F=\dfrac{1}{X^n-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ avec, en utilisant la deuxième formule, $\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\lambda_k=\dfrac{1}{n\omega_k^{n-1}}=\dfrac{\omega_k}{n}$. Ainsi, $F=\dfrac{1}{X^n-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k/n}{X-\omega_k}$

Propriété : Partie polaire relative à un pôle d'ordre $\geqslant 2$

Si α pôle d'ordre $m\geqslant 2$ de $F=\dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible,

$$F=\frac{A}{B}=\frac{A}{(X-\alpha)^m B_1}=\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\cdots+\frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m}+G$$

où $B_1(\alpha)\neq 0$ et α n'est pas pôle de G.

Alors $\lambda_m=[\widehat{(X-\alpha)^m}F](\alpha)=\dfrac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}$ et $F-\dfrac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m}$ admet α comme pôle d'ordre au plus $m-1$ ce qui permet de réitérer le processus.

Remarque

Lorsqu'il reste peu de cœfficients à calculer, on essaye plutôt d'évaluer la fraction rationnelle en des points bien choisis ou utiliser des méthodes d'analyse réelle (limite en ∞ de $x^m F(x)$...)

Exemple

$$F = \frac{2X+1}{X^3-2X^2+X} = \frac{2X+1}{(X-1)^2X} = 0 + \frac{a}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{b}{X}.$$

Évaluation en 2 : $\frac{5}{2} = a+3+\frac{b}{2}$ et limite de $xF(x)$ en $+\infty$: $0 = a+b$ d'où $a=-1$ et $b=1$.

Remarque

Exploiter la parité !

Exemple

$$F = \frac{X}{(X^2-1)^2} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1} = \frac{1/4}{(X-1)^2} - \frac{1/4}{(X+1)^2}$$ car

$F(X) = -F(-X)$ donc par unicité, $b = d$ et $c = -a$ avec $a = \frac{1}{4}$ par le « cache », et $xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 = b+d = 2b$ donc $b=d=0$.

c Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, $F = \frac{A}{B}$ sous forme irréductible, avec la décomposition de B en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}$: $F = \dfrac{A}{\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}\prod_{i=1}^{r}\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{n_i}}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe d'uniques familles $(\lambda_{k,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m_k}}$, $(\mu_{i,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ et $(\nu_{i,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ de nombres réels tels que

$$F = \underbrace{Q}_{\text{partie entière}} + \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m_k} \overbrace{\frac{\lambda_{k,j}}{(X-x_k)^j}}^{\substack{\text{élément simple}\\ \text{de 1e espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à } x_k} + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n_i} \overbrace{\frac{\mu_{i,\ell}X+\nu_{i,\ell}}{\left(X^2+p_iX+q_i\right)^{\ell}}}^{\substack{\text{élément simple}\\ \text{de 2e espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à } X^2+p_iX+q_i}.$$

Remarques

R 1 – Les $\frac{1}{(X-a)^n}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et les $\frac{1}{(X^2+pX+q)^n}$ et $\frac{X}{(X^2+pX+q)^n}$ pour $p,q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 < 4q$ et $n \in \mathbb{N}^*$ forment une base de $\mathbb{R}^-(X)$.

R 2 – Les méthode vues dans $\mathbb{C}$ s'appliquent pour les pôles réels. Pour les μ et ν, on peut appliquer la méthode « du cache » en α racine complexe de X^2+pX+q.

On peut aussi décomposer dans $\mathbb{C}$ et rassembler les pôles complexes non réels et leur conjugué. L'écriture $F = \overline{F}$ et l'unicité des cœfficients donne des relations entre ceux-ci (comme avec la parité).

Exemples

E 1 – $F = \dfrac{X^3-1}{X^3+X} = 1 - \dfrac{1}{X} + \dfrac{X-1}{X^2+1}$ soit directement, en évaluant en i, soit en passant par $\mathbb{C}$.

E 2 – $F = \dfrac{2X^2}{(X^2+1)^3} = \dfrac{2}{(X^2+1)^2} - \dfrac{2}{(X^2+1)^3}$ en posant $Y = X^2$ ou avec du ± 2.

d Décomposition en éléments simples de P'/P

Propriété : Décomposition en éléments simples de P'/P

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ **scindé**, $P = \lambda\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}$. Alors la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ est donnée par $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p}\dfrac{m_k}{X-x_k}$.*

*Variante : si $P = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X-y_k)$ où les y_k sont les racines **comptées avec multiplicité**, alors $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{X-y_k}$.*

Remarque

En considérant les ordres, on voit facilement que $\frac{P'}{P}$ n'a que des pôles simples.

Exemple

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{2-\omega} = \frac{n2^{n-1}}{2^n-1}$$ avec $P = X^n - 1$.