DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$\forall x \in [-1,1]$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n$$

$$\forall x \in \begin{cases} [-1,1] & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\text{noté } \binom{\alpha}{n}} x^n$$

VARIABLES ALÉATOIRES

Sous réserve d'existence, sommabilité, d'admission de moments, etc. Voici les principales formules du chapitre.

- **Loi de X** : $\mathbb{P}_X : A \mapsto \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$ déterminée par la famille $(\mathbb{P}(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sommable de somme 1.
- **Espérance de X** : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x$ et si Ω fini ou dénombrable $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega)$.
- **Formule de transfert** : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x)$.
- **Variance de X** : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.
- **Covariance de X et Y** : $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ nulle si indépendantes.
- **Variance d'une somme** : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.
- **Inég. de Markov** : Si $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.
- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Si $a > 0$, $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$ où $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
- **Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$** : $\mathbb{P}(X=1) = p$ $\quad$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$ $\quad$ $\mathbb{E}(X) = p$ $\quad$ $\mathbb{V}(X) = pq$ $\quad$ $G_X(t) = q + pt$
- **Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$** : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $\quad$ $\mathbb{E}(X) = np$ $\quad$ $\mathbb{V}(X) = npq$ $\quad$ $G_X(t) = (q+pt)^n$.
- **Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$** : $p \in]0,1[$ $\quad$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1}$ $\quad$ $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ $\quad$ $\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$ $\quad$ $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$
- **Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$** : $\lambda > 0$ $\quad$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ $\quad$ $\mathbb{E}(X) = \lambda$ $\quad$ $\mathbb{V}(X) = \lambda$ $\quad$ $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$