BILAN DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°8

Exercice 1 (E3A) : Séries entières

1. Première question, récurrence forte, pas spécialement difficile. Certains donnent dès le départ une très mauvaise impression pour tout le reste de la copie...
2. Définition du rayon de convergence ou lemme d'Abel : immédiat.
3. **a)** Attention, avec les séries entières, ce sont des équivalents des coefficients qu'on prend, sans le x^n. Passer directement de $\sum \frac{x^n}{n+2}$ à $\sum x^n$ était un peu rapide en ce début de devoir.

   b) Il est souvent oublié de mentionner le fait qu'en dehors de $[-R,R]$, la série entière diverge.

   c) Bien traité en général. On rappelle que le rayon de convergence d'un produit de Cauchy est en général seulement supérieur au minimum des rayons de convergence, et qu'il n'y a pas nécessairement égalité même si les deux rayons sont différents.

   d) La dérivabilité et l'expression de la dérivée de f sont rarement justifiées (il suffit de dire qu'on est dans l'intervalle ouvert de convergence), tout comme la somme du produit de Cauchy (de nouveau, dans l'intervalle ouvert de convergence il y a absolue convergence).
4. Là encore, il fallait justifier que pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) > 0$. Dire qu'on somme des termes > 0 ne suffit pas a priori car les inégalités deviennent larges à la limite, mais remarquer qu'alors $f(x) \geqslant a_0 > 0$ suffisait.

   Il ne faut pas oublier également la constante lorsqu'on primitive, et de justifier qu'on peut primitiver terme à terme la série entière car dans l'intervalle ouvert de convergence.
5. Le plus simple était de procéder à une décomposition en éléments simples mais attention : la séparation d'une somme de série en deux sommes **doit être justifiée** : il est possible que la somme de départ converge mais pas les deux sommes finales.

   Le cas $x = 0$ était à traiter à part.
6. Facile avec l'expression de f dans la question précédente.

Exercice 2 (CCINP) : Probabilités

1. Question de cours. À savoir faire, donc.

   Attention en particulier, on peut prendre la limite (ou un équivalent) d'un grand produit à condition que le nombre de termes soit **fixe**, indépendant de n.

   Il est interdit à quelques jours des concours de se faire encore avoir avec des limites de la forme $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
2. Pour reconnaître une loi binomiale, il suffit d'avoir un nombre de succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli de même paramètre **INDÉPENDANTES**.
3. Simple application numérique (mais sans calculatrice, demandait une certain talent...)

Problème (CCINP) : Début très classique, à savoir faire.

- **Partie 1**

1. a) Connaître parfaitement TOUTES les formes du théorème spectral et avec des énoncés COMPLETS.

   Dire qu'une matrice A symétrique réelle est diagonalisable, par exemple, n'est pas complet. Elle est ortho-diagonalisable, c'est-à-dire qu'on a $P \in \mathcal{O}(n)$ et D diagonale telles que $A = PDP^\intercal = PDP^{-1}$.

   b) Savoir, sans faire de calcul ou presque, pourquoi une matrice n'ayant qu'une valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si elle vaut λI_n.

2. a) Savoir exprimer un produit scalaire en base **orthonormée**.

   A défaut, savoir le retrouver par bilinéarité du produit scalaire : dans ce cas, on doit prendre des indices différents dans les sommes.

   b) Cette fois, on utilise l'expression de la norme en base orthonormée. Ce n'est pas très difficile si on a la question précédente. De nouveau, très très classique, savoir faire.

3. a) Là aussi du grand classique et à savoir faire.

   b) L'occasion de retrouver l'expression des cœfficients d'une matrice d'un endomorphisme en base orthonormée : à savoir écrire (et justifier).

- **Partie 2**

  4. A savoir faire aussi : on invoque soit une fonction polynomiale par rapport aux cœfficients de M (le plus simple), soit la continuité de $M \mapsto M^\intercal$ (linéaire en dimension finie) et celle de $(A, B) \mapsto AB$ (bilinéaire en dimension finie).

  5. Là aussi, tellement classique, savoir traduire l'orthogonalité d'une matrice sur ses lignes ou ses colonnes.

  6. Utiliser la question précédente pour dire que $\mathcal{O}(n)$ est borné nécessite de préciser une norme (même si elle n'importe finalement pas car on est en dimension finie). Fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue, classiquement et très guidé par les questions précédentes.

  Le reste est aussi classique mais a été moins traité.

  Vous pouvez voir les commentaires du rapport officiel.

Problème (Mines-Ponts) :

Là encore je vous renvoie au rapport officiel pour le détail par question, très détaillé.

Je précise simplement que

- Le préliminaire et la question 6 sont vraiment plus que classique, savoir refaire les yeux fermés.
- La partie B est classique aussi : il s'agit de la propriété de Borel-Lebesgue des compacts, de tout recouvrement d'un compact par des ouvert, on peut extraire un recouvrement fini, et sa traduction en terme de fermés.

  Pas simple, mais classique.
- Il fallait bien soigner la rédaction de la question 11, où une norme était définie « à l'envers » : c'est l'endomorphisme u que l'on faisait varier et non le vecteur x.