CHAPITRE XXII

Calcul différentiel

I Dérivées partielles

1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle

Lemme : « de partition »

Soit A une partie de E, $f : A \to F$, B_1, B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cup B_2 = A$, $a \in \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2$, $\ell \in F$.

Si $f_{|B_1}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f_{|B_2}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

En particulier, si $a \in A$, f est continue en a.

2 Dérivées partielles

Définition

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$. On appelle je **application partielle de f en a** l'application $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$.

Définition : Dérivées partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$. On appelle je **dérivée partielle de f en a**, lorsqu'elle existe, la dérivée de la je application partielle de f en a. On note $\partial_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ le nombre dérivé en ce point.

On appelle je **dérivée partielle** la fonction définie sur $\mathscr{U}$ par $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Définition : Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$: f_i est la ie composante de f.

On dit que f admet des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$ si chacune des f_i admet une dérivée partielle en a.

On appelle alors **dérivée partielle de f en a** le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right)$.

Définition : Matrice jacobienne

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. On appelle, lorsque existe, **matrice jacobienne de f en a** la matrice

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété

On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Théorème

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathscr{U}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in \mathscr{U}$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

Corollaire

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Propriété : Règle de la chaîne

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient $f:\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ et $g:V\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f=g\circ(f_1,\dots,f_n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,p]\!]$,

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

où l'on a choisi de noter plutôt $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ la k^e dérivée partielle de g. Notation non ambiguë :

$$\partial_j(g\circ f)(a)=\sum_{k=1}^{n}\left[\partial_k g\right](f(a))\left[\partial_j f_k\right](a)$$

Cas particulier : important

Si $\gamma:\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, en notant, pour $t\in\mathbb{R}$, $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

$$(f\circ\gamma)'(t)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))+z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)).$$

Corollaire

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient $f:\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ et $g:V\to\mathbb{R}^q$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,p]\!]$ et $\ell\in[\![1,q]\!]$,

$$\frac{\partial(g_\ell\circ f)}{\partial x_j}(a)=\frac{\partial(g\circ f)_\ell}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

En particulier,

$$J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a))J_f(a).$$

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^n$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** $k\in\mathbb{N}^*$, une dérivée $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f. Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)$$

noté $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}=\partial_{i_k}\cdots\partial_{i_1}f$ où $i_1,\dots,i_k\in[\![1,p]\!]$.

Définition

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^n$. On dit que f **est de classe** $\mathscr{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

On dit que f **est de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Propriété

On note $f=(f_1,\dots,f_n)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Théorème : de Schwarz

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^2$.
Alors, pour tout $i,j\in[\![1,p]\!]$ tel que $i\neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}.$$

Propriété

Soit $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

(i) Toute combinaison linéaire, toute composée, tout produit, tout quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ l'est encore.

(ii) Si $B:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^n$, bilinéaire, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^m$ et $g:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^q$ de classe $\mathscr{C}^k$ alors $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

(iii) Toute fonction polynomiale à n variable est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

(iv) Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynomiales) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

II Applications

1 Extremums

Définition : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$, $a_0\in A$, $f:A\to\mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en a_0 un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $r>0$ tel que pour tout $a\in B(a_0,r)$, $f(a)\leqslant f(a_0)$ (respectivement $f(a)\geqslant f(a_0)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $a\in A$.

Définition : Vecteur gradient

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) \in \mathbb{R}^p.$$

Lorsque $\nabla f(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $\mathscr{U}$ ouvert (très important !) de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathscr{U}$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a.

Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles.

*La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé **point selle** ou **point col**.*

Méthode : Recherche d'extremum

(i) Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.
Puis, pour chaque point critique a, on étudie $f(a+h) - f(a)$ pour h proche de 0. Comme a est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.

(iii) Si $f : K \to \mathbb{R}$ où K est un compact, on est assuré de l'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. On les cherche comme dans la méthode précédente.

2 Équations aux dérivées partielles

Méthode

- Savoir résoudre les ÉDP fondamentales auxquelles on se ramène systématiquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

- Dans la pratique, on s'y ramène via un changement de variables $(u,v) = \varphi(x,y)$, en écrivant $f(x,y) = g(u,v)$ et en remplaçant soit (x,y) en fonction de (u,v), soit (u,v) en fonction de (x,y).
- La changement de variable doit être bijectif, entre deux ouverts et régulier (classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ suivant l'ordre de l'équation.)
- S'il n'est pas donné, il doit être affine ou polaire.
- Appliquer la règle de la chaîne (ou utiliser des matrices jacobiennes) pour exprimer les dérivées de f en fonction de celle de g ou l'inverse, et simplifier l'ÉDP.

III Différentielle

1 Différentielle en un point

Définition : Application différentiable en un point

Soit f définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de E, à valeurs dans F. Soit a un point de $\mathscr{U}$. On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ_a de E dans F telle que, au voisinage de 0_E,

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

ou encore, au voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + \ell_a(x-a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x-a).$$

Lorsqu'elle existe, l'application ℓ_a est unique et appelée **différentielle** de f au point a ou encore **application linéaire tangente** à f en a, notée $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(E,F)$. On a donc

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

Propriété

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

2 Cas particuliers

Propriété : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Dans le cas d'une fonction $f : I \to F$, f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a.

Dans ce cas, $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hf'(a)$ et en particulier $f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$.

Propriété : Cas d'une fonction constante

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est constante, elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et pour tout $a \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Propriété : Cas d'une fonction linéaire

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est la restriction à $\mathscr{U}$ d'une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et pour tout $a \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a) = \varphi$ (et donc $\mathrm{d}f$ est constante).

3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition

On dit que $f : \mathcal{U} \subset E \to F$ est **dérivable selon le vecteur** $v \in E$ **au point** $a \in \mathcal{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.

On note alors $\mathrm{D}_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in F$.

Définition : Dérivées partielles

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $f : \mathcal{U} \subset E \to F$, $a \in \mathcal{U}$, $j \in [\![1,p]\!]$.

On appelle **j^e dérivée partielle de** f **en** a, lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur e_j de base en a :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) \in F.$$

4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Propriété

Soit $f : \mathcal{U} \to F$, $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et $D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$.

Cas particulier

Soit $f : \mathcal{U} \to F$, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$.

Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$\mathrm{d}f(a)(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Propriété

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $f : \mathcal{U} \to F$, $a \in \mathcal{U}$ tel que f est différentiable en a.

Alors pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$,

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

On note $\mathrm{d}x_j : \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & h_j \end{vmatrix}$ la forme linéaire j^e coordonnée dans $\mathcal{B}$. Alors on a

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\mathrm{d}x_j.$$

5 Matrice jacobienne

Définition : Matrice jacobienne

Soit $p = \dim E$, $n = \dim F$, $\mathcal{U}$ ouvert de E et $f : E \to F$ différentiable, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F. On note $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varepsilon_i$.

On appelle **matrice jacobienne** de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice $J_f(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Propriété : Matrice jacobienne et différentielle

$$J_f(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\left(\mathrm{d}f(a)\right)$$

IV Opérations sur les différentielles

1 Combinaisons linéaires

Propriété

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de E, $f, g : \mathcal{U} \to F$ différentiables en $a \in \mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a).$$

2 Image par une application bilinéaire

Lemme

Si E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$ et $y \in F$,

$$\|B(x,y)\|_G \leqslant C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

où les normes infinies sont prises dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F. L'équivalence des normes permet de les remplacer par des normes quelconques (quitte à changer C).

Propriété

Soit $\mathcal{U}$ ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $f : \mathcal{U} \to E$ et $g : \mathcal{U} \to F$ des applications différentiables en $a \in \mathcal{U}$ et $B : E \times F \to G$ une fonction bilinéaire.

Alors $\phi : \mathcal{U} \to G$ définie par $\phi : x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}\phi(a) : h \mapsto B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h)).$$

3 Composition

Propriété : Différentielle d'une composée

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de E, $\mathcal{V}$ ouvert de F, $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{V} \to G$ différentiable en $b = f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Propriété : Matrice jacobienne d'une composée

En munissant E, F et G de bases, on obtient

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Corollaire : Dérivée le long d'un arc

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de E, $f : \mathcal{U} \to F$, I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{U}$ une application dérivable.
On suppose que f est différentiable en $\gamma(t)$ où $t \in I$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

En munissant E d'une base, on retrouve l'expression vue avec la règle de la chaîne

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

V CLASSE $\mathscr{C}^1$

Définition : Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$f : \mathcal{U} \to F$ est dite **de classe** $\mathscr{C}^1$ lorsque f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et $\mathrm{d}f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Propriété

Toute combinaison linéaire, toute composée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ l'est encore.
Si B est bilinéaire et f, g sont $\mathscr{C}^1$, $B(f, g)$ l'est.

Propriété

Soit $f : \mathcal{U} \to F$, d'applications coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$ dans une base de F. f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si toutes les f_i le sont.

Théorème : Caractérisation avec les dérivées partielles

f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si, dans une base quelconque de E, toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Propriété

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{U}, F)$, $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathcal{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire : Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{U}, F)$ et $\mathcal{U}$ est connexe par arcs, alors f est constante si et seulement si $\mathrm{d}f = 0$.

VI GRADIENT ET POINTS CRITIQUES

Définition - Propriété : Gradient

Soit E un espace **euclidien**, $\mathcal{U}$ un ouvert de E, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ et appelé **gradient de f en a** tel que pour tout $h \in E$, $\mathrm{d}f(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h$.

Propriété

*Soit E un espace **euclidien**, $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si l'on fixe une base **orthonormée** de E, le coordonnées de $\nabla f(a)$ dans cette base sont*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right).$$

Définition : Point critique

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ différentiable.
On dit que a est un **point critique** de f lorsque $\mathrm{d}f(a)=0$.
Si E est euclidien, cela équivaut à $\nabla f(a)=0$.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $\mathscr{U}$ ouvert (très important) et $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ différentiable en $a\in\mathscr{U}$.

Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire $\mathrm{d}f(a)=0$.

VII GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Définition : Vecteur tangent

Si A est une partie de E, $a\in A$. Un vecteur $v\in E$ est dit **tangent** à A en a lorsqu'il existe $\varepsilon>0$ et un arc $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to A$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=v$.

Définition : Ligne de niveau

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
On appelle **ligne de niveau** λ pour f l'ensemble

$$A_\lambda=\{x\in\mathscr{U},\ f(x)=\lambda\}.$$

Propriété

Si E est euclidien, f est différentiable et la ligne de niveau $A_\lambda\neq\varnothing$ (d'équation $f(x,y)=\lambda$), alors pour tout $a\in A_\lambda$, $\nabla f(a)$ est orthogonal à tout vecteur tangent à A en a.

Corollaire

Si f est différentiable sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x,y)=\lambda$, $a_0=(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$ alors si $\nabla f(a)\neq 0$, c'est un vecteur normal à $\mathscr{C}$ en a_0.

Propriété

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ différentiable.
Soit $S\subset\mathbb{R}^3$ la surface représentative de f, c'est-à-dire

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle|\ (x,y)\in\mathscr{U}, z=f(x,y)\right\}.$$

Soit $\varphi:\left|\begin{array}{ccc} U\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & z-f(x,y)\end{array}\right.$

L'ensemble des vecteurs tangents à S en $a_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ est un plan vectoriel P de vecteur normal $\nabla\varphi(a)$, donc d'équation $\nabla\varphi(a)\cdot(x,y,z)=0$.

*On appelle **espace tangent à** S **en** a_0 le sous-espace affine a_0+P, d'équation $\nabla\varphi(a_0)\cdot(a-a_0)=0$ où $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.*