CHAPITRE XXII

Calcul différentiel

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$ est autorisée.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a)\cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.	
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.	On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u,v), on ait $\|B(u,v)\| \leqslant C\|u\|\,\|v\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.
Différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$.
d) Cas des applications numériques	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
Point critique d'une application différentiable.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.	

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	
Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.	Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$: équation cartésienne.
Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.	Le théorème des fonctions implicites est hors programme. ⇆ PC : électrostatique.

f) Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \mathrm{d}t.$$	⇆ PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_l} \dots \partial_{j_1} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme. ⇆ PC : laplacien.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Démonstrations non exigibles.
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu. ⇆ PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

Plan du cours

Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie nulle, $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de E.

I DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle

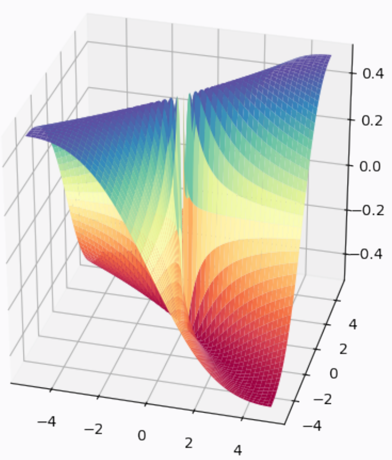
Remarque

Si $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x_1, \dots, x_p) \in F$ est une fonction de n variables, la continuité des applications partielles $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$ (les x_j pour $j \neq i$ étant fixés) ne garantit pas celle de f.

Exemple

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a des applications partielles $x \mapsto f(x, 0) = 0$ et $y \mapsto f(0, y) = 0$ continue en 0, mais est discontinue en $(0,0)$ car $f(x, x) \not\to 0$.



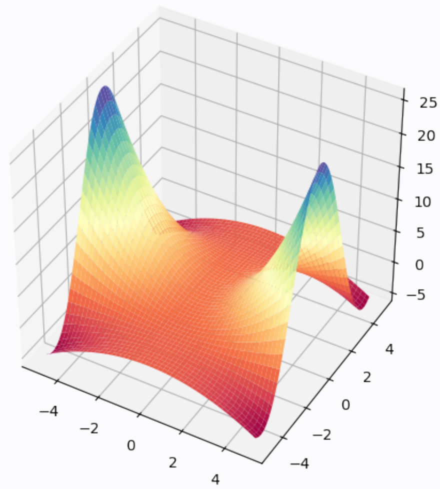
Lemme : « de partition »

Soit A une partie de E, $f : A \to F$, B_1, B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cup B_2 = A$, $a \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, $\ell \in F$.
Si $f_{|B_1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f_{|B_2}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
En particulier, si $a \in A$, f est continue en a.

Exemple

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.



2 Dérivées partielles

$\mathscr{U}$ est toujours un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Définition

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$. On appelle **j^e application partielle de f en a** l'application $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$.

Remarque

Le domaine de définition d'une application partielle peut être compliqué, mais c'est toujours un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition : Dérivées partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$. On appelle **j^e dérivée partielle de f en a**, lorsqu'elle existe, la dérivée de la j^e application partielle de f en a. On note $\partial_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ le nombre dérivé en ce point.

On appelle **j^e dérivée partielle** la fonction définie sur $\mathscr{U}$ par $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Remarques

R 1 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer la j^e dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to a_j} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t - a_j}.$$

R 2 – En général, $p = 2$ ou 3. Si $p = 2$, par exemple, on note plutôt $f(x,y)$ que $f(x_1, x_2)$. On notera alors volontiers $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ les deux dérivées partielles selon la PREMIÈRE ou la DEUXIÈME variable. En mathématiques, on dérive selon une position et non « par rapport à une variable », dont le nom n'importe pas.

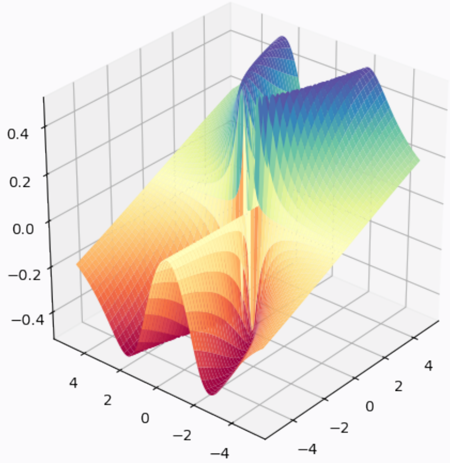
Exemple

$f : (y,x) \mapsto xy^2$.

Exemple

Dérivées partielles en tout point de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$



Les application partielles $x\mapsto f(x,0)$ et $y\mapsto f(0,y)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

Remarque

Et donc ⚠ l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité !

Définition : Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^n$. On note $f=(f_1,\dots,f_n)$: f_i est la i^e composante de f.
On dit que f admet des dérivées partielles en $a\in\mathscr{U}$ si chacune des f_i admet une dérivée partielle en a.
On appelle alors **dérivée partielle de f en a** le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\dots,\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right)$.

Exemple

Dérivées partielles en tout point de

$$f:(r,\theta,\phi)\mapsto\big(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\big).$$

Définition : Matrice jacobienne

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^n$. On note $f=(f_1,\dots,f_n)$. On appelle, lorsque existe, **matrice jacobienne de f en a** la matrice

$$J_f(a)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Remarque

$J_f(a)\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
Donc si $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, c'est une matrice ligne (le gradient $\nabla f(a)$).
Et si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, c'est une matrice colonne. En fait, $J_f(a)=f'(a)$ si on confond n-uplet et vecteur colonne.

Exemples

E 1 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires : $f:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

E 2 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques : $f:(r,\theta,z)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

E 3 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques : $f:(r,\theta,\phi)\mapsto\big(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\big)$.

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété

On note $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Remarques

R 1 – Il suffit donc de travailler sur les fonction $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$.

R 2 – On rappelle que l'on note, pour $f : E \to F$, $f(h) = \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$ lorsque

$$\|f(h)\|_F = \underset{h \to 0_E}{\mathrm{o}}(\|h\|_E),$$

autrement dit lorsque

$$\frac{\|f(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}.$$

Cela revient aussi à écrire que

$$f(h) = \|h\|_E \, \varepsilon(h)$$

où

$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F.$$

Comme on travaille en dimension finie, n'importe quelle norme convient.

Théorème

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathscr{U}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in \mathscr{U}$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

Démonstration

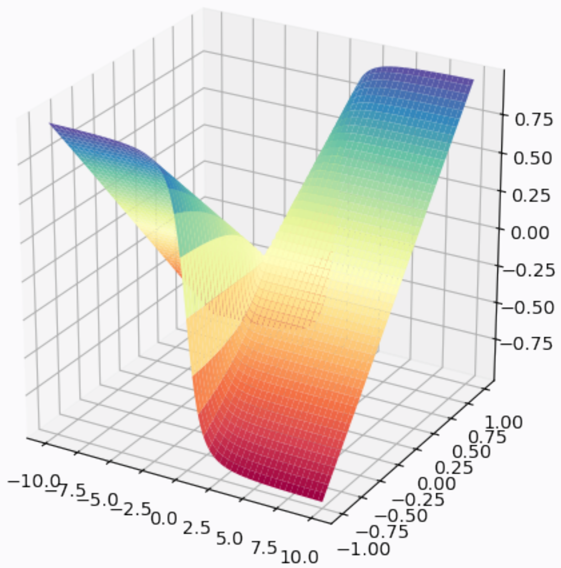
Admis provisoirement. □

Corollaire

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Exercice : CCINP 33

On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f\left(x,y\right)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **et** $f(0,0)=0$.



1. **Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**

2. **Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.**

3. **f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.**

---

1. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $||(x,y)||_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
   On a $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leqslant||(x,y)||_2$ et $|y|\leqslant||(x,y)||_2$.
   On en déduit que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $|f(x,y)-f(0,0)|=\dfrac{|x||y|}{||(x,y)||_2}\leqslant\dfrac{\left(||(x,y)||_2\right)^2}{||(x,y)||_2}=||(x,y)||_2\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
   On en déduit que f est continue en $(0,0)$.
   Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   En $(0,0)$:
   $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(f(t,0)-f(0,0)\right)=0$, donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   De même, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\left(f(0,t)-f(0,0)\right)=0$. Donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa seconde variable et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
3. D'après le cours, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Or,

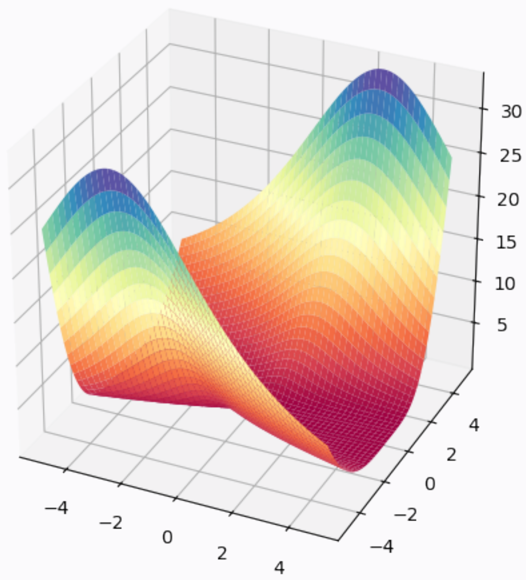
   $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

   On remarque que $\forall\,x>0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice : CCINP 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



1. **Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.**
2. **(a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.**

   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. **Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.**

   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.

   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.

   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

---

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $x^2+y^2-xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geqslant 0$.
   Donc $x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   D'après 1., $x^2+y^2-xy = 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   D'après **1.**, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \dfrac{2y^4}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$.
   Ainsi, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 2(x^2+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.
   Or : f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(0,0) = \alpha$.
   Donc : f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow \alpha = 0$.
   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \alpha = 0$.
3. (a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$.

   (b) Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

   Pour tout $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   (c) Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors $|x| \leqslant r$ et $|y| \leqslant r$.
   De plus, $(x,y) \to (0,0) \Longleftrightarrow r \to 0$.

   D'après **1.** et l'inégalité triangulaire,
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 4\frac{|y^4(2x-y)|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\frac{r^4(2r+r)}{r^4} = 12r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant 4\frac{|2y^5-3xy^4+4x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 4\frac{2r^5+3r^5+4r^5}{r^4} = 36r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur $\mathbb{R}^2$.
   Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété : Règle de la chaîne

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient $f:\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ et $g:V\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f = g\circ(f_1,\dots,f_n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,p]\!]$,

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

où l'on a choisi de noter plutôt $\dfrac{\partial g}{\partial y_k}$ la ke dérivée partielle de g. Notation non ambiguë :

$$\partial_j(g\circ f)(a)=\sum_{k=1}^{n}\left[\partial_k g\right](f(a))\left[\partial_j f_k\right](a)$$

Démonstration

Admis provisoirement. □

Exercice : Changement de variable et gradient en polaire

Soit $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $V=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$, $g:\left|\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{array}\right.$, $\vec{u}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ **et** $\vec{v}(\theta)=\vec{u}'(\theta)$.

1. **Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.**
2. **Si $(r,\theta)\in V$, on note $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Exprimer les dérivées partielles de g en (r,θ) en fonction des dérivées partielles de f en (x,y).**
3. **Exprimer le gradient $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ dans la base $(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g en (r,θ).**

---

1. Facile.
2. $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u}(\theta)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}(\theta)$.

Cas particulier : important

Si $\gamma:\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, en notant, pour $t\in\mathbb{R}$, $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

$$(f\circ\gamma)'(t)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))+z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)).$$

Corollaire

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient $f:\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ et $g:V\to\mathbb{R}^q$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,p]\!]$ et $\ell\in[\![1,q]\!]$,

$$\frac{\partial(g_\ell\circ f)}{\partial x_j}(a)=\frac{\partial(g\circ f)_\ell}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

En particulier,

$$J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a))J_f(a).$$

Exercice

Calculer les dérivées partielles de $h:(x,y)\mapsto g(x+y,xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

Exercice

Calculer la dérivée de $g:t\mapsto f(ta_1,\dots,ta_n)$ où $f\in\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}\right)$ et $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^p$.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** $k \in \mathbb{N}^*$, une dérivée $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f. Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)$$

noté $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}} = \partial_{i_k}\cdots\partial_{i_1} f$ où $i_1,\ldots,i_k \in [\![1,p]\!]$.

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$. On dit que f **est de classe** $\mathscr{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

On dit que f **est de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Propriété

On note $f = (f_1,\ldots,f_n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Théorème : de Schwarz

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^2$.
Alors, pour tout $i, j \in [\![1,p]\!]$ tel que $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration

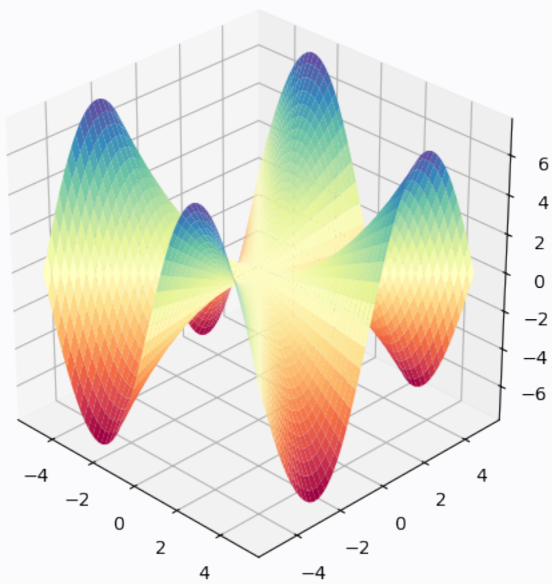
Non exigible. □

Exercice : CCINP 57

1. **Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.**
   (a) **Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.**
   (b) **Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».**
2. **On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par**

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**
   (b) **Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.**



---

1. (a) f est continue en $(0,0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.
$\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (espace de dimension finie) .

(b) f est différentiable en $(0,0) \iff \exists L \in \mathscr{L}_{\mathscr{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})/$ au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + o(\|(x,y)\|)$.

Remarque : Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, si $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors $L \in \mathscr{L}_{\mathscr{C}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

2. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
On remarque que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \|(x,y)\|$ et $|y| \leqslant \|(x,y)\|$ (*).
   (a) $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Continuité en (0,0) :

   On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire, $|f(x,y) - f(0,0)| = \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x|.|y| \leqslant \|(x,y)\|^2$.
   Donc f est continue en $(0,0)$.
   (b) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. (**)
   Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   De même, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, donc $\lim\limits_{y \to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

   D'après (*) et (**), $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
   $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$.
   Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.
   Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice

L'intérêt de la fonction de l'exercice précédent (due à Péano) est d'être un contre-exemple au théorème de Schwarz.
Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ **et** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$**. Qu'en conclut-on ?**

On trouve, en calculant les applications partielles, ou en prenant directement les taux d'accroissements, -1 et 1.
On en déduit que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Propriété

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
(i) Toute combinaison linéaire, toute composée, tout produit, tout quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ l'est encore.
(ii) Si $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$, bilinéaire, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathscr{C}^k$ alors $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$.
(iii) Toute fonction polynomiale à n variable est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
(iv) Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynomiales) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Démonstration

Non exigible. □

II APPLICATIONS

$\mathscr{U}$ désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

1 Extremums

Définition : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$, $a_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en a_0 un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $a \in B(a_0, r)$, $f(a) \leqslant f(a_0)$ (respectivement $f(a) \geqslant f(a_0)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $a \in A$.

Définition : Vecteur gradient

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) \in \mathbb{R}^p.$$

Lorsque $\nabla f(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $\mathscr{U}$ ouvert (très important !) de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathscr{U}$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a.

Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles.

*La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé **point selle** ou **point col**.*

Démonstration

Il suffit d'appliquer, pour tout i, la propriété connue à la fonction numérique $t \mapsto f(a_1, \dots, , a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ qui admet un extremum en a_i. $\square$

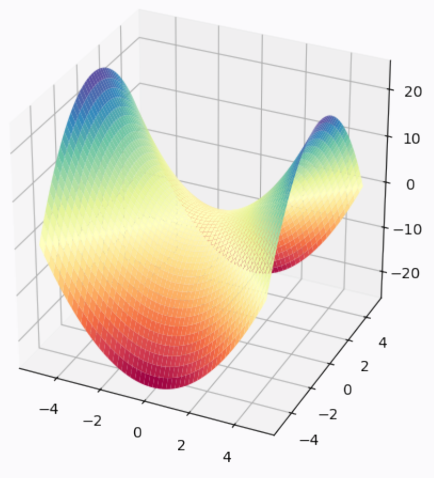
Exemple

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

présente un point selle en $(0, 0)$**.**

La surface porte le doux nom de *paraboloïde hyperbolique*.

Le seul point critique est $(0, 0)$ et $f(x, 0) \geqslant 0$, $f(0, y) \leqslant 0$.



Méthode : Recherche d'extremum

(i) Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.

Puis, pour chaque point critique a, on étudie $f(a + h) - f(a)$ pour h proche de 0. Comme a est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

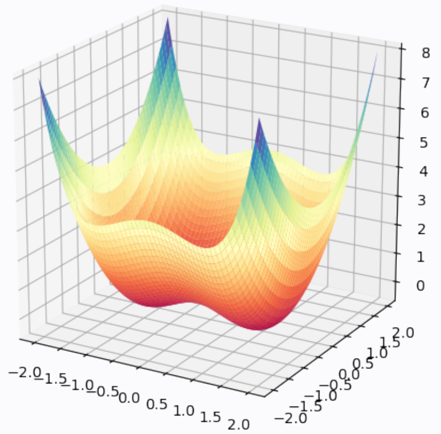
(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.

(iii) Si $f : K \to \mathbb{R}$ où K est un compact, on est assuré de l'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. On les cherche comme dans la méthode précédente.

Exercice

Déterminer les extremums de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$



On trouve trois points critiques : $(\pm 1, 0)$ et $(0,0)$.
$(0,0)$ est un point selle en regardant $f(x,0)$ et $f(0,y)$.
$(\pm 1, 0)$: minimum global. $f(1+h,k) = k^2 + \frac{h^2}{2}(h+2)^2$.

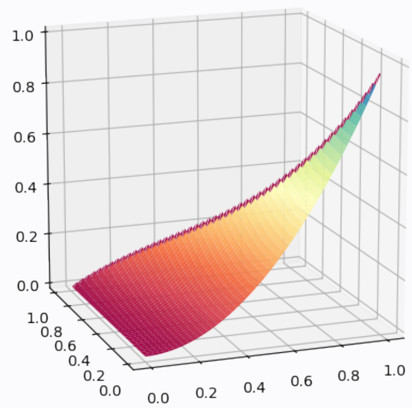
Exercice

Soit

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy^2$$

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ x+y \leqslant 1\right\}$$

Montrer que f atteint un minimum et un maximum sur K et trouver tous les points en lesquels ils sont atteints.



K est fermé borné en dimension finie donc compact.
Donc f atteint un minimum et un maximum sur K.
Sur $\mathring{K}$, il n'y a qu'un point critique $(0,0) \notin \mathring{K}$ qui est exclu d'emblée.
On paramètre les trois côtés du bord, et on trouve que le maximum est 1 atteint en $(1,0)$, et le minimum est 0 atteint en tout $(0,t)$.

2 Équations aux dérivées partielles

Exemples : fondamentaux

E 1 – Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ dans $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ où $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puis $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0,1)$.

E 2 – Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x)$ dans $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ où $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 3 – Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y)$ dans $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ où $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 4 – Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$ dans $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

E 5 – Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ dans $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

Méthode

- Savoir résoudre les ÉDP fondamentales auxquelles on se ramène systématiquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

- Dans la pratique, on s'y ramène via un changement de variables $(u, v) = \varphi(x, y)$, en écrivant $f(x, y) = g(u, v)$ et en remplaçant soit (x, y) en fonction de (u, v), soit (u, v) en fonction de (x, y).
- La changement de variable doit être bijectif, entre deux ouverts et régulier (classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ suivant l'ordre de l'équation.)
- S'il n'est pas donné, il doit être affine ou polaire.
- Appliquer la règle de la chaîne (ou utiliser des matrices jacobiennes) pour exprimer les dérivées de f en fonction de celle de g ou l'inverse, et simplifier l'ÉDP.

Exercice

Résoudre $2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ sur $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ à l'aide du changement de variable $(u, v) = \varphi(x, y) = (x+y, x+2y)$, en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice du changement de variable est inversible.
Solutions : $f : (x, y) \mapsto g(x+2y)$ où $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre $a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ sur $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ à l'aide du changement de variable affine.

Exercice

Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

sur $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Exercice

Soit $\mathscr{V} =]0, +\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{V}$.
Résoudre

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.

$\mathscr{U} = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
Solutions : $(x, y) \mapsto g\left(x^2 + y^2\right)$ où $g \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_*^+\right)$.

Exercice

À l'aide du changement de variable $(u, v) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2(\mathscr{U})$ où $\mathscr{U} = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Solutions : $(x, y) \mapsto xg\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right)$ où $g, h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+)$.

III DIFFÉRENTIELLE

1 Différentielle en un point

Rappel : si I est intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to F$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si on a un vecteur $b \in F$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hb + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}}}{\mathrm{o}}(h)$$

(et, dans ce cas, $b = f'(a)$).

Nous allons généraliser cette idée aux fonctions définies sur une espace vectoriel normé de dimension finie E.

Définition : Application différentiable en un point

Soit f définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de E, à valeurs dans F. Soit a un point de $\mathscr{U}$. On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ_a de E dans F telle que, au voisinage de 0_E,

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

ou encore, au voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + \ell_a(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a).$$

Lorsqu'elle existe, l'application ℓ_a est unique et appelée **différentielle** de f au point a ou encore **application linéaire tangente** à f en a, notée $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(E,F)$. On a donc

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(h)$$

Remarques

R 1 – Lorsque cela a du sens, on définit donc une application $\mathrm{d}f : \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{vmatrix}$ appelée **différentielle** de f.

R 2 – On note parfois $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ au lieu de $\mathrm{d}f(a)(h)$.

R 3 – L'unicité vient du

Lemme

Si $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ est telle que $\varphi(h) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$, alors φ est l'application nulle.

Démonstration

$\varphi(h) = \|h\|\,\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$.
Alors pour tout $x \in E$, $t \in \mathbb{R}_*^+$, $t\varphi(x) = \varphi(tx) = t\|x\|\,\varepsilon(tx)$ donc $\varphi(x) = \|x\|\,\varepsilon(tx) \xrightarrow[t\to 0]{} 0_F$.
Donc pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = 0_F$. □

Propriété

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Par continuité de l'application linéaire en dimension finie (celle de E suffit) $\mathrm{d}f(a)$, en passant à la limite dans le développement limité, $f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$. □

2 Cas particuliers

Propriété : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Dans le cas d'une fonction $f : I \to F$, f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a.
Dans ce cas, $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hf'(a)$ et en particulier $f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$.

Propriété : Cas d'une fonction constante

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est constante, elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et pour tout $a \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Propriété : Cas d'une fonction linéaire

Si $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ est la restriction à $\mathscr{U}$ d'une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, elle est différentiable en tout point de $\mathscr{U}$ et pour tout $a \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a) = \varphi$ (et donc $\mathrm{d}f$ est constante).

Exercice

Montrer que $f : \begin{vmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{vmatrix.}$ **est différentiable en toute** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **et calculer** $\mathrm{d}f(A)$.

$(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ avec $H \mapsto AH + HA$ linéaire et en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes), $0 \leqslant \|H^2\| \leqslant \|H\|^2$ donc $\dfrac{\|H^2\|}{\|H\|} \to 0$ et $H^2 = \mathrm{o}(H)$. Donc f est différentiable en A et $\mathrm{d}f(A) : H \mapsto AH + HA$.

Exercice

Montrer que, si E **est un espace euclidien** $f : \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|^2 \end{vmatrix.}$ **est différentiable en toute** $a \in E$ **et calculer** $\mathrm{d}f(a)$.

$\|a+h\|^2 = \|a\|^2 + 2(a|h) + \|h\|^2$ avec $h \mapsto 2(a|h)$ linéaire et $\|h\|^2 = \mathrm{o}(h)$. Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2(a|h)$.

Exercice

Montrer que, si E **est un espace euclidien,** $u \in \mathcal{L}(E)$, $f : \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x|u(x)) \end{vmatrix.}$ **est différentiable en toute** $a \in E$ **et calculer** $\mathrm{d}f(a)$.

Que se passe-t-il si, de plus, u **est symétrique ?**

$(a+h|u(a+h)) = (a|u(a)) + (h|u(a)) + (a|u(h)) + (h|u(h))$ avec $h \mapsto (h|u(a)) + (a|u(h))$ linéaire et $|(h|u(h))| \leqslant \|h\|\,\|u(h)\|$ par Cauchy-Schwarz (pour le norme euclidienne associée au produit scalaire) et comme $\|u(h)\| \to 0$ par continuité, $(h|u(h)) = \mathrm{o}(h)$.

Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto (h|u(a)) + (a|u(h))$, ce qui devient $2(u(a)|h)$ si de plus u est symétrique.

3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Le fait de travailler sur un ouvert $\mathcal{U}$ assure, pour a point de $\mathcal{U}$ et v vecteur de E, l'existence d'un $\delta > 0$ (« distance de sécurité ») tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a + tv \in \mathcal{U}$ (on s'éloigne de a dans la direction de v, cela permet de définir l'application $\phi : t \mapsto f(a+tv)$ d'une variable réelle au voisinage de 0.

Définition

On dit que $f : \mathcal{U} \subset E \to F$ est **dérivable selon le vecteur** $v \in E$ **au point** $a \in \mathcal{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.

On note alors $\mathrm{D}_v f(a) = \phi'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F$.

Exemple

La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $(0,0)$ sinon admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ et si $v = (\alpha, \beta)$: $\mathrm{D}_v f((0,0)) = 0$ si $\alpha = 0$ et $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$.

Définition : Dérivées partielles

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $f : \mathcal{U} \subset E \to F$, $a \in \mathcal{U}$, $j \in [\![1, p]\!]$.
On appelle jᵉ **dérivée partielle de** f **en** a, lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur e_j de base en a :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) \in F.$$

Remarques

R 1 – Les dérivées partielles vues pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ sont les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Bien sûr la notion générale de dérivée partielle dépend de la base choisie. En ce sens, la notation $\mathrm{D}_{e_j} f(a)$ est la plus précise.

R 2 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer la jᵉ dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j. : en effet, en dérive

$$\phi : t \mapsto f(a + te_j) = f(a_1 e_1 + \cdots + (a_j + t)e_j + \cdots + a_n e_n)$$

en 0, ce qui revient aussi à dériver

$$t \mapsto f(a_1 e_1 + \cdots + t e_j + \cdots + a_n e_n)$$

en a_j.

Exemple

Avec $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $(0,0)$ sinon, on voit que ⚠ on peut avoir des dérivées partielles en $(0,0)$ sans avoir de dérivée selon certains vecteurs ($v = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_*^2$, ici).

4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Propriété

Soit $f : \mathscr{U} \to F$, $a \in \mathscr{U}$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et $D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$.

Démonstration

$f(a+tv) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(tv) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$ donc $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \mathrm{d}f(a)(v)$ par linéarité de $\mathrm{d}f(a)$. □

Cas particulier

Soit $f : \mathscr{U} \to F$, $a \in \mathscr{U}$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base $\mathscr{B}$.

Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$\mathrm{d}f(a)(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Propriété

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $f : \mathscr{U} \to F$, $a \in \mathscr{U}$ tel que f est différentiable en a.

Alors pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$,

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

On note $\mathrm{d}x_j : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & h_j \end{array} \right.$ la forme linéaire j^{e} coordonnée dans $\mathscr{B}$. Alors on a

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}x_j.$$

Démonstration

C'est la linéarité de $\mathrm{d}f(a)$:

$$\mathrm{d}f(a)\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{d}f(a)\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$ □

5 Matrice jacobienne

Définition : Matrice jacobienne

Soit $p = \dim E$, $n = \dim F$, $\mathscr{U}$ ouvert de E et $f : E \to F$ différentiable, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F. On note $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varepsilon_i$.

On appelle **matrice jacobienne** de f en a dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice $J_f(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Propriété : Matrice jacobienne et différentielle

$$J_f(a) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\big(\mathrm{d}f(a)\big)$$

Démonstration

$\mathrm{d}f(a)(e_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\varepsilon_i$ permet bien de remplir la j^e colonne de $J_f(a)$. □

IV OPÉRATIONS SUR LES DIFFÉRENTIELLES

1 Combinaisons linéaires

Propriété

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de E, $f, g : \mathscr{U} \to F$ différentiables en $a \in \mathscr{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a).$$

Démonstration

Il suffit de remarquer, par propriétés de la dérivation que $J_{\lambda f+\mu g}(a) = \lambda J_f(a) + \mu J_g(a)$ et de repasser aux applications linéaires.
Autre possibilité : on ajoute les DL_1 :

$$\lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \lambda f(a) + \mu g(a) + \lambda \mathrm{d}f(a)(h) + \mu \mathrm{d}g(a)(h) + \mathrm{o}(h)$$

avec $\lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$ linéaire, donc par unicité, $\lambda f + \mu g$ est différentiable et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$. □

Remarque

$f \mapsto \mathrm{d}f$ est donc linéaire.

2 Image par une application bilinéaire

Lemme

Si E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$ et $y \in F$,

$$\|B(x,y)\|_G \leqslant C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

où les normes infinies sont prises dans des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F. L'équivalence des normes permet de les remplacer par des normes quelconques (quitte à changer C).

Démonstration

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ une base de F.

$$\|B(x,y)\|_G = \left\|B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j\right)\right\|_G = \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j B(e_i, \varepsilon_j)\right\|_G \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |x_i|\,|y_j|\,\|B(e_i,\varepsilon_j)\|_G \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

avec $C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left\| B(e_i, \varepsilon_j) \right\|_G$. □

Propriété

Soit $\mathscr{U}$ ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $f : \mathscr{U} \to E$ et $g : \mathscr{U} \to F$ des applications différentiables en $a \in \mathscr{U}$ et $B : E \times F \to G$ une fonction bilinéaire.
Alors $\phi : \mathscr{U} \to G$ définie par $\phi : x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}\phi(a) : h \mapsto B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h)).$$

Remarque
Se généralise à des applications multilinéaires.

Démonstration

1re tentative On peut voir le faire avec les dérivées selon les vecteurs. On sait, sous réserve d'existence, que $\mathrm{d}\phi(a)(h) = D_h\phi(a)$. Or

$$\frac{\phi(a+th)-\phi(a)}{t} = \frac{B(f(a+th), g(a+th)) - B(f(a), g(a))}{t} = B\left(\frac{f(a+th)-f(a)}{t}, g(a+th)\right) + B\left(f(a), \frac{g(a+th)-g(a)}{t}\right)$$

Comme $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} \to \mathrm{d}f(a)(h)$, $g(a+th \to g(a)$, $\frac{g(a+th)-g(a)}{t} \to \mathrm{d}g(a)(h)$ et comme les applications bilinéaires sont continues en dimension finie, on conclut directement.
En refait en fait la démonstration du résultat déjà connu pour les fonctions d'une seule variable.
Le problème est que l'existence de dérivée selon tout vecteur ne garantit pas la différentiabilité...
On peut par exemple montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$ admet des dérivées selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue , et encore moins différentiable (voir TD).

Bonne méthode On utilise les DL_1 : avec $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,

$$\begin{aligned}\phi(a+h) = B(f(a+h), g(a+h)) &= B\left(f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h),\ \ g(a) + \mathrm{d}g(a)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)\right) \\ &= B\left(f(a),\ g(a)\right) + B\left(\mathrm{d}f(a)(h),\ g(a)\right) + B\left(f(a),\ \mathrm{d}g(a)(h)\right) + \psi(h)\end{aligned}$$

avec $h \mapsto B\left(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)\right) + B\left(f(a),\ \mathrm{d}g(a)(h)\right)$ linéaire et

$$\psi(h) = \|h\|\, B\left(f(a) + \mathrm{d}f(a)(h),\ \varepsilon_2(h)\right) + \|h\|\, B\left(\varepsilon_1(h),\ g(a) + \mathrm{d}g(a)(h)\right) + \|h\|^2 B\left(\varepsilon_1(h),\ \varepsilon_2(h)\right) + B\left(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\right)$$

donc

$$\frac{\psi(h)}{\|h\|} = B\left(f(a) + \mathrm{d}f(a)(h),\ \ \varepsilon_2(h)\right) + B\left(\varepsilon_1(h),\ \ g(a) + \mathrm{d}g(a)(h)\right) + \|h\|\, B\left(\varepsilon_1(h),\ \varepsilon_2(h)\right) + \frac{B\left(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\right)}{\|h\|}.$$

Les trois premiers termes tendent vers 0 lorsque $h \to 0$ par continuité de l'application bilinéaire en dimension finie.
Pour le dernier, on remarque que $(x, y) \mapsto B(\mathrm{d}f(a)(x), \mathrm{d}g(a)(y))$ est bilinéaire, donc on a d'après le lemme un réel C (on peut par exemple choisir la norme infinie pour h, car on est en dimension finie) tel que

$$\left\| \frac{B\left(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\right)}{\|h\|} \right\|_G = \frac{\left\| B\left(\mathrm{d}f(a)(h),\ \mathrm{d}g(a)(h)\right) \right\|_G}{\|h\|} \leqslant \frac{C\|h\|^2}{\|h\|} = C\|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Donc $\psi(h) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$, ce qui permet d'obtenir toute la conclusion. □

3 Composition

Propriété : Différentielle d'une composée

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de E, $\mathscr{V}$ ouvert de F, $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ différentiable en $a \in \mathscr{U}$ et $g : \mathscr{V} \to G$ différentiable en $b = f(a)$.
Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Propriété : Matrice jacobienne d'une composée

En munissant E, F et G de bases, on obtient

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Remarque

D'où la règle de la chaîne.

Démonstration

Il suffit de composer les DL_1 : on écrit, avec $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$, et pour simplifier la lecture , les applications linéaires $\phi = \mathrm{d}f(a)$ et $\psi = \mathrm{d}g(f(a))$,

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)$$

et

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + \psi(k) + \|k\|\,\varepsilon_2(k)$$

puis

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g\Big[f(a) + \underbrace{\big(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big)}_{k}\Big] \\ &= g(f(a)) + \psi\big(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big) + \big\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big\|\,\varepsilon_2\big(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big) \\ &= g\circ f(a) + \big[\psi\circ\varphi\big](h) + \zeta(h) \end{aligned}$$

Avec $\dfrac{\zeta(h)}{\|h\|} = \psi(\varepsilon_1(h)) + \dfrac{\big\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big\|}{\|h\|}\varepsilon_2\big(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big)$.

φ et ψ étant linéaires en dimension finie, elles sont continues, donc $\psi(\varepsilon_1(h)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\varphi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ puis $\varepsilon_2\big(\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Enfin, $\dfrac{\big\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big\|}{\|h\|} \leqslant \dfrac{\big\|\varphi(h)\big\|}{\|h\|} + \varepsilon_1(h)$ et par continuité de l'application linéaire φ, on a $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout h, $\big\|\varphi(h)\big\| \leqslant C\,\|h\|$ donc $\dfrac{\big\|\varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big\|}{\|h\|}$ est borné et finalement $\dfrac{\zeta(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, c'est-à-dire $\zeta(h) = o(h)$.

Par unicité, on en déduit que $g\circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \psi\circ\varphi = \mathrm{d}g(f(a))\circ\mathrm{d}f(a)$. □

Corollaire : Dérivée le long d'un arc

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to F$, I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathscr{U}$ une application dérivable.
On suppose que f est différentiable en $\gamma(t)$ où $t \in I$. Alors $f\circ\gamma$ est dérivable en t et

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

En munissant E d'une base, on retrouve l'expression vue avec la règle de la chaîne

$$(f\circ\gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'(t)\frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

V CLASSE $\mathscr{C}^1$

Définition : Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$f : \mathscr{U} \to F$ est dite **de classe $\mathscr{C}^1$** lorsque f est différentiable sur $\mathscr{U}$ et $\mathrm{d}f : \mathscr{U} \to \mathscr{L}(E,F)$ est continue.

Propriété

Toute combinaison linéaire, toute composée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ l'est encore.
Si B est bilinéaire et f, g sont $\mathscr{C}^1$, $B(f,g)$ l'est.

Propriété

Soit $f : \mathscr{U} \to F$, d'applications coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$ dans une base de F. f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si toutes les f_i le sont.

Théorème : Caractérisation avec les dérivées partielles

f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si, dans une base quelconque de E, toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Démonstration

Non exigible. □

Propriété

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, F)$, $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathscr{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

On a vu que $\mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t)) = (f \circ \gamma)'(t)$, c'est donc une simple application du théorème fondamental de l'analyse. □

Corollaire : Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, F)$ et $\mathscr{U}$ est connexe par arcs, alors f est constante si et seulement si $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration

Le sens direct a déjà été vu.
Pour le sens réciproque, seul le cas convexe est au programme. On suppose donc $\mathscr{U}$ convexe et $\mathrm{d}f = 0$.
Soient $a, b \in \mathscr{U}$, on veut montrer que $f(a) = f(b)$.
Mais on peut relier a et b par un segment inclus dans $\mathscr{U}$ par convexité : $\gamma : t \in [0,1] \mapsto ta + (1-t)b$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors, la propriété précédente donne $f(b) - f(a) = 0$. □

VI GRADIENT ET POINTS CRITIQUES

Définition - Propriété : Gradient

Soit E un espace **euclidien**, $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors pour tout $a \in \mathscr{U}$, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$ et appelé **gradient de f en a** tel que pour tout $h \in E$, $\mathrm{d}f(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h$.

Démonstration

C'est le théorème de représentation de Riesz : la **forme** linéaire $\mathrm{d}f(a)$ s'écrit $x \mapsto (b \cdot x)$ pour un certain vecteur b... □

Remarques

R 1 – On comprend mieux la notation alternative $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ faisant penser à un produit scalaire.

R 2 – Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique,

$$\mathrm{d}f(a)(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

On retrouve notre gradient habituel.
Exactement le même raisonnement (expression du produit scalaire en base orthonormée) donne la propriété suivante.

Propriété

*Soit E un espace **euclidien**, $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si l'on fixe une base **orthonormée** de E, le coordonnées de $\nabla f(a)$ dans cette base sont*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right).$$

Remarque : Interprétation géométrique

On suppose f différentiable en a et $\nabla f(a) \neq 0_E$.
Notons S la sphère unité de E pour la norme $\|\cdot\|_2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall\, h \in S,\ \ \mathrm{d}f(a)(h) = (\nabla f(a) | h) \leqslant |(\nabla f(a) | h)| \leqslant \|\nabla f(a)\|_2 \|h\|_2 = \|\nabla f(a)\|_2.$$

Or ce majorant est atteint pour $h_0 = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_2}$.
Ainsi le vecteur $\nabla f(a)$ donne la direction et le sens de plus forte variation de la fonction f.
C'est à la base d'algorithmes d'optimisation (descente de gradient), utilisé par exemple en Machine Learning (apprentissage automatique : intelligence artificielle).

Définition : Point critique

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ différentiable.
On dit que a est un **point critique** de f lorsque $\mathrm{d}f(a) = 0$.
Si E est euclidien, cela équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $\mathscr{U}$ ouvert (très important) et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathscr{U}$.
Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Démonstration

Il suffit de revenir aux dérivées partielles. □

VII GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Définition : Vecteur tangent

Si A est une partie de E, $a \in A$. Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à A en a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Définition : Ligne de niveau

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de E, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle **ligne de niveau** λ pour f l'ensemble

$$A_\lambda = \{x \in \mathscr{U},\ f(x) = \lambda\}.$$

Remarque

Pour une surface $z = f(x, y)$, cela revient à prendre l'intersection de la surface avec le plan horizontal d'équation $z = \lambda$.

Propriété

Si E est euclidien, f est différentiable et la ligne de niveau $A_\lambda \neq \varnothing$ (d'équation $f(x, y) = \lambda$), alors pour tout $a \in A_\lambda$, $\nabla f(a)$ est orthogonal à tout vecteur tangent à A en a.

Démonstration

Si v est tangent à A_λ en a, on a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A_\lambda$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.
Alors pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(\gamma(t)) = \lambda$ et en dérivant (on peut) en 0, $\mathrm{d}f(\gamma(0))\left(\gamma'(0)\right) = \mathrm{d}f(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v = 0$. $\square$

Corollaire

Si f est différentiable sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles, $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x,y) = \lambda$ (dite implicite), $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ alors si $\nabla f(a) \neq 0$, c'est un vecteur normal à $\mathscr{C}$ en a_0.

Remarque

D'où l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Exercice

Retrouver l'équation de la tangente en (x_0, y_0) à une courbe donnée par une équation (explicite) $y = f(x)$.
On pourra poser $F(x,y) = y - f(x)$.

Propriété

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ différentiable.
Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface représentative de f, c'est-à-dire

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ (x,y) \in \mathscr{U}, z = f(x,y)\right\}.$$

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & z - f(x,y) \end{array} \right.$

L'ensemble des vecteurs tangents à S en $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ est un plan vectoriel P de vecteur normal $\nabla\varphi(a)$, donc d'équation $\nabla\varphi(a) \cdot (x,y,z) = 0$.
*On appelle **espace tangent à S en** a_0 le sous-espace affine $a_0 + P$, d'équation $\nabla\varphi(a_0) \cdot (a - a_0) = 0$ où $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.*

Remarque

On retrouve, pour le plan tangent, une équation type « équation de la tangente » :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0).$$