Équations différentielles linéaires (MPSI)

I ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles.

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL$_1$) toute équation du type

$$(L)\ \forall\, t \in D,\quad \alpha(t) f'(t) + \beta(t) f(t) = \gamma(t)$$

où α, β, γ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation

$$(L)\quad \alpha(t) y' + \beta(t) y = \gamma(t).$$

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions.

Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation $(H)\ \alpha(t) y' + \beta(t) y = 0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

Remarque

La notation $\alpha(t) y' + \beta(t) y = \gamma(t)$ vient du fait que l'on peut l'écrire sous la forme $F(t, y, y') = 0$ où t, y, y' sont trois variables indépendantes. f est solution si et seulement si pour tout t, $F\big(t, f(t), f'(t)\big) = 0$. Dans cette notation, y et y' ne représentent pas des fonctions !

Toute la théorie sera valable sur des $\boxed{\text{intervalles } I}$ sur lesquelles $\boxed{\alpha \text{ ne s'annule pas}}$ et sur lesquels $\boxed{\alpha, \beta, \gamma \text{ sont continues.}}$
On se ramène alors a une équation, dite **normalisée**, du type

$$(L)\quad y' + a(t) y = b(t)$$

avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. L'équation homogène associée est $(H)\quad y' + a(t) y = 0$.

2 Résolution de l'équation homogène

Propriété

*Soit $(H)\ \ y' + a(t) y = 0$ avec a continue sur I. Les solutions de (H) sont les fonctions $f : t \in I \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, où A désigne **une** primitive de a.*

Remarque Le physicien écrirait $\dfrac{y'}{y} = -a$ donc, en intégrant, $\ln|y| = -A + c$ donc $y = \pm \mathrm{e}^{c} \mathrm{e}^{-A} = \lambda \mathrm{e}^{-A}$.

Correct ? Problème :

- y pourrait s'annuler. Mais on a facilement que soit on est tout le temps nul, soit on ne l'est jamais.
- Ensuite le $|y|$: par continuité, comme y ne s'annule jamais, elle est de signe constant.

Donc pourquoi pas, mais pénible à justifier.
Cependant, c'est un bon moyen de retrouver la formule !

Exemple

$(H)\ \forall\, x \in I,\ \ (x-1) y' + x y = 0$ se ramène à $y' + \dfrac{x}{x-1} y = 0$.

On résout sur $I = I_k$ pour $k = 1$ ou 2 avec $I_1 =]1, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 1[$.
$x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ continue sur I_k. $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x-1| + C$ sur I_k.

f solution de (H) sur I_k si et seulement si $\exists\, \lambda_k \in \mathbb{K},\ \ \forall\, x \in I_k,\ \ f(x) = \lambda_k \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{|x-1|}$

si et seulement si $\exists\, \mu_k \in \mathbb{K},\ \ \forall\, x \in I_k,\ \ f(x) = \mu_k \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1}$ car $x-1$ ne change pas de signe sur I_k.

Les solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sont donc les $x \longmapsto \begin{cases} \mu_1 \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \mu_2 \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Raccord de solutions : Y a-t-il des solution sur $\mathbb{R}$? Par analyse-synthèse, une solution étant nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme ci-dessus sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Analyse : si c'est le cas, la continuité en 1 impose $\mu_1 = \mu_2 = 0$. On n'a pas besoin d'étudier la dérivabilité en 1 ici (ce qui se ferait avec les taux d'accroissement ou le théorème limite de la dérivée par exemple).
Synthèse : la fonction nulle est bien solution sur $\mathbb{R}$, et c'est donc la seule.

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions définies sur D, $(L)\ y' + a(t) y = b(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.
Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f \in S_L \Longleftrightarrow f - f_0 \in S_H$ soit

$$S_L = \{f_0 + h,\ h \in S_H\} = f_0 + S_H.$$

b Principe de superposition

Propriété

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, a, b définies sur I avec $b(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k b_k(t)$ où les α_k sont des scalaires et les b_k des fonctions. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est une solution particulière de $(L_k)\ y' + a(t) y = b_k(t)$, alors $f_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ est solution de $(L)\ y' + a(t) y = b(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(t)$.

c Méthode de variation de la constante

Comment trouver une solution particulière dans le cas général ? Exactement comme pour résoudre l'équation homogène, avec le facteur intégrant : $f' + af = b \Longleftrightarrow f'\mathrm{e}^A + af\mathrm{e}^A = b\mathrm{e}^A \Longleftrightarrow \left(f\mathrm{e}^A\right)' = b\mathrm{e}^A \Longleftrightarrow f = \left(\int b\mathrm{e}^A\right)\mathrm{e}^{-A}$.

Les solutions sont donc à chercher sous la forme $f(t) = g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.

C'est la **méthode de variation de la constante** (à partir de la solution générale de l'équation homogène.)

Remarques

R 1 – Les termes en g doivent se simplifier en traduisant que $x \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est solution. Il ne doit rester que du g'. (car e^{-A} est solution de (H)).

R 2 – On obtient en fait toutes les solutions en primitivant g' avec la constante d'intégration.

II ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL$_2$) toute équation du type

$$(L) \quad \forall t \in D,\ \ \alpha(t)f''(t) + \beta(t)f'(t) + \gamma(t)f(t) = \delta(t)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation $(L)\ \ \alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions. Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation $(H)\ \ \alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

2 Résolution de l'équation homogène

Propriété

Soit (E) $ar^2 + br + c = 0$ équation caractéristique associée à (H) $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

(i) Si (E) possède deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$, les solutions de (H) sont les fonctions $f :\ t \in \mathbb{R} \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$.

(ii) Si (E) possède une solution double $r \in \mathbb{K}$, les solutions de (H) sont les fonctions $f :\ t \in \mathbb{R} \mapsto (A + Bt)\mathrm{e}^{rt}$ avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$.

(iii) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si (E) ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$, il y a deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C}$.
Les solutions de (H) sont les fonctions $f :\ t \in \mathbb{R} \mapsto (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ soit encore les $f :\ t \in \mathbb{R} \mapsto K\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $(K, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ et δ définie sur D, (L) $ay'' + by' + cy = \delta(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f \in S_L \Longleftrightarrow f - f_0 \in S_H$ soit $S_L = \{f_0 + f,\ f \in S_H\} = f_0 + S_H$.

b Cas de quelques seconds membres simples

Le principe de superposition reste valable, on sait trouver une solution particulière pour quelques seconds membres simples.

- S'il est constant, c'est facile.
- S'il est sous forme polynôme-exponentielle :

Propriété

Une EDL$_2$ de la forme $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ admet $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme

$$f_0 : t \mapsto t^k Q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

où k est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc) et Q un polynôme de même degré que P.

- S'il est sous forme d'un sinus ou d'un cosinus : pour une EDL$_2$ de la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\omega t) \text{ ou } P(t)\sin(\omega t)$$

avec $a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$, on se ramène au cas des exponentielles en écrivant

$$\cos(\omega t) = \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \text{ et } \sin(\omega t) = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right).$$

On a facilement que si f est solution de $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, alors, comme $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont solution de $ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\omega t)$ et $ay'' + by' + cy = P(t)\sin(\omega t)$.

On trouvera donc $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme

$$t \mapsto t^k Q(t)(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$$

où k est l'ordre de $\lambda = \mathrm{i}\omega$ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc) et $Q \in \mathbb{R}[X]$ de même degré que P.

Remarque

Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, on peut aussi passer par les formules d'Euler : $\cos(\omega t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}$ et utiliser le principe de superposition.

- Quand le second membre est polynomial : on cherche une solution polynomiale ; c'est le même principe (et pour cause !) que la recherche d'une solution développable en série entière.