

# Espaces préhilbertiens réels

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés  $E$ , sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

## PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

### 1 Définition d'un produit scalaire

#### Définition : Produit scalaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.  
On appelle **produit scalaire sur  $E$**  toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.  
C'est-à-dire toute application  $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- (i) **Bilinéarité :**
- Linéarité à gauche :**  
Pour tout  $y \in E$ , l'application  $x \mapsto (x|y)$  est linéaire :  
 $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x_1 + \lambda x_2|y) = (x_1|y) + \lambda(x_2|y)$ .
  - Linéarité à droite :**  
Pour tout  $x \in E$ , l'application  $y \mapsto (x|y)$  est linéaire :  
 $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x|y_1 + \lambda y_2) = (x|y_1) + \lambda(x|y_2)$ .
- (ii) **Symétrie :**  $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = (y|x)$ .

- (iii) **Définie-positivité :**
- Positivité :**  
 $\forall x \in E, (x|x) \geq 0$  ;
  - Caractère défini :**  
 $\forall x \in E, (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

#### Définition : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et si  $(\cdot|\cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ , on dit que  $(E, (\cdot|\cdot))$  est un **espace préhilbertien réel**.

Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel *de dimension finie*, et si  $(\cdot|\cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ , on dit que  $(E, (\cdot|\cdot))$  est un **espace euclidien**.

### 2 Exemples

#### a Sur $\mathbb{R}^n$

##### Définition - Propriété : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$  fait de  $\mathbb{R}^n$  un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur  $\mathbb{R}^n$ .

##### Définition - Propriété : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit

$$(A|B) = \text{tr}(A^T \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$  fait de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### b Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

##### Définition - Propriété

Pour des fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  où  $a < b$ , on définit

$$(f|g) = \int_a^b f g$$

$(\cdot|\cdot)$  fait de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$



### 3 Norme euclidienne

#### a Définition

##### Définition : Norme euclidienne

Soit  $(E, \cdot)$  un espace préhilbertien réel.  
 Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on pose  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .  
 L'application  $\|\cdot\|$  est appelée **norme euclidienne** sur  $E$  associée au produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$ .

#### b Identités remarquables et polarisation

##### Propriété : Identités remarquables

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.  
 Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$$(i) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \quad (ii) \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$$

$$(iii) \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{Identité du parallélogramme})$$

##### Propriété : Identités de polarisation

Soit  $(E, \cdot)$  un espace préhilbertien réel et  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire.  
 Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$$(i) (x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (ii) (x|y) = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

#### c Inégalité de Cauchy-Schwarz

##### Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $(E, \cdot)$  un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall x, y \in E, (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y) \quad \text{ie} \quad \forall x, y \in E, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont liés (i.e.  $y = 0$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$ )

#### d Inégalité triangulaire

##### Propriété : Inégalité de Minkowski

Soit  $(E, \cdot)$  un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée  $\|\cdot\|$ . Alors

$$\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont positivement liés (i.e.  $y = 0$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ / x = \lambda y$ )

De plus, 
$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

#### e Norme sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

##### Propriété

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur  $E$ .

##### Définition : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace préhilbertien réel  $E$ , on définit :

- la **distance euclidienne**  $d(x, y)$  par  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,
- si  $x$  et  $y$  sont non nuls, l'**écart angulaire**  $\theta$  est le réel défini par

$$\theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos \theta = \frac{(x|y)}{\|x\| \|y\|}.$$

##### Définition : Distance à une partie non vide

Si  $A$  est une partie non vide de  $E$  préhilbertien réel, et  $x \in E$ , on définit la distance de  $x$  à  $A$  par  $d(x, A) = \inf_{y \in A} (d(x, y)) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$ .

## II ORTHOGONALITÉ

### 1 Vecteurs orthogonaux

#### Définition : Vecteurs orthogonaux

Soit  $(E, |)$  un espace préhilbertien réel,  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $E$ .  
 $x$  et  $y$  sont dit **orthogonaux** si et seulement si  $(x|y) = 0$ . On écrit parfois  $x \perp y$ .

### 2 Famille orthonormale

#### Définition : Familles orthogonale et orthonormale

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$ .  
 $(v_1, \dots, v_p)$  est une **famille orthogonale** de  $E$  si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ avec } i \neq j, (v_i | v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \dots, v_p)$  est une **famille orthonormale** de  $E$  si et seulement si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (v_i | v_j) = \delta_{i,j}$$

#### Propriété

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.

#### Corollaire

Si  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$ , il n'existe pas de famille orthogonale de plus de  $n$  vecteurs non nuls.

#### Théorème : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel  $E$ , une famille orthogonale  $(v_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ . On a

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fautive en général si  $p \geq 3$ .

### 3 Ensembles orthogonaux

#### Définition : Parties orthogonales

Soient  $(E, |)$  un espace préhilbertien réel et  $A, B$  des parties non vides de  $E$ .  
 On dit que  $A$  est **orthogonale** à  $B$  si et seulement si  $\forall (a, b) \in A \times B, (a|b) = 0$ . On note  $A \perp B$ .

#### Propriété

Si  $A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$  sont orthogonales, alors  $A \cap B = \emptyset$  ou  $A \cap B = \{0_E\}$ .

### 4 Orthogonal d'un sous-espace

#### Définition : Orthogonal d'un sous-espace

Soient  $(E, |)$  un espace préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On définit l'**orthogonal de  $F$**  comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall y \in F, (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté  $F^\circ$ ). Il s'agit de la plus grande partie de  $E$  (pour l'inclusion) orthogonale à  $F$ .

#### Propriété

Soient  $(E, |)$  préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
 $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

#### Propriété

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  préhilbertien réel.  
 Si  $F = \text{Vect } A$  ( $A$  engendre  $F$ ) et si  $x$  est un vecteur de  $E$ ,

$$x \in F^\perp \iff \forall a \in A, (x|a) = 0$$



**Propriété**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- (i)  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$ .
- (ii)  $F \subset (F^\perp)^\perp$ ,
- (iii) La somme est directe :  $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$ ,
- (iv) Si  $F \subset G$ , alors  $G^\perp \subset F^\perp$ ,
- (v)  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$  et  $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$ .

**Propriété**

On obtient ainsi que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout  $j$ ,  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$  et la composante sur  $\varepsilon_j$  de  $\varepsilon_j$  vaut 1.

On a alors  $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$  est une b.o.n de  $E$ .

**Corollaire**

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

**Corollaire : Théorème de la base orthonormale incomplète**

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

### III ESPACES OU SOUS-ESPACES EUCLIDIENS

#### 1 Base orthonormale

**Théorème**

Tout espace euclidien non réduit à  $0_E$  admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

**Définition : Orthonormalisation de Schmidt**

Étant donné  $(E, |)$  un espace euclidien, et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  :

1. On pose  $\varepsilon_1 = e_1$ .
2. Par récurrence, pour  $j \geq 2$ , on cherche des réels  $\lambda_k$  tels que le vecteur  $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$  soit orthogonal à tous les  $\varepsilon_i$  pour  $i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$  :

$$\forall i < j, (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$

3. On normalise les vecteurs :  $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ .

#### 2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

**Propriété**

Soit  $(E, |)$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une **base orthonormale** de  $E$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = (e_i | x) \qquad (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = X^T \times X \qquad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

**Propriétés**

Soit  $E$  euclidien,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  des bases orthonormales.

- (i) Si  $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ ,  $P^{-1} = P^T$ .
- (ii) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , la formule de changement de base s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

- (iii)  $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \pm 1$  : 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.

### 3 Isomorphisme avec le dual

#### Théorème : de représentation de Riesz

Soit  $a \in E$  euclidien et  $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$ . Alors

$$\Psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto \Phi_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour toute forme linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , il existe un unique élément  $a \in E$  tel que  $\varphi = (a|\cdot)$ .

### 4 Produit mixte

#### Propriétés

Soit  $E$  euclidien orienté et  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale **directe**.  $\det_{\mathcal{B}}$  ne dépend pas de  $\mathcal{B}$ .

#### Définition : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur  $E$  euclidien orienté de dimension  $n$  le déterminant de  $n$  vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note  $[v_1, \dots, v_n]$ , pour  $v_1, \dots, v_n \in E$ .

#### Propriétés

Soit  $E$  euclidien orienté.

- (i)  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto [v_1, \dots, v_n]$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ .
- (ii) Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base,  $[e_1, \dots, e_n] = 1$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base inversée,  $[e_1, \dots, e_n] = -1$  (réciproque fautive).
- (iii)  $[v_1, \dots, v_n] = 0$  si et seulement si  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée.
- (iv) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $[u(v_1), \dots, u(v_n)] = \det u \times [v_1, \dots, v_n]$ .

#### Propriété

Soit  $E$  euclidien orienté.

- (i) Si  $\dim E = 2$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}]$  représente le volume orienté du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- (ii) Si  $\dim E = 3$ ,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  représente le volume orienté du parallélépipède construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

### 5 Propriétés de $F^\perp$

#### Théorème

Si  $F$  est un sev de **dimension finie** de  $E$  préhilbertien réel, alors

$$E = F \oplus F^\perp = F \oplus F^\perp$$

Le sev  $F^\perp$  est alors appelé **supplémentaire orthogonal** de  $F$ , il est unique.

#### Corollaire

Soit  $E$  un espace **euclidien**,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- (i)  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$
- (ii)  $(F^\perp)^\perp = F$
- (iii)  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- (iv)  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

### 6 Projections et symétries orthogonales



#### Projections orthogonales

#### Définition : Projection orthogonale

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, et  $F$  un sous-espace de  $E$  **de dimension finie**. On appelle **projecteur orthogonal sur  $F$**  la projection  $p_F$  sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .



### Propriétés

- $p_F \in \mathcal{L}(E)$  et  $p_F = p_F^2$
- $F = \text{Im } p_F = \text{Ker}(p_F - id_E)$
- $F^\perp = \text{Ker } p_F$
- $\text{Im } p_F \oplus \text{Ker } p_F = E$
- $\forall x \in E, p_F(x) \in F$  et  $x - p_F(x) \in F^\perp$ .

### Propriété : Expression en base orthonormale

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  préhilbertien réel,  $(e_1, \dots, e_p)$  une **base orthonormale** de  $F$ . Alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$$

### Cas particulier

- Projection orthogonale sur une droite :  $D = \mathbb{R}a$ , où  $a \neq 0_E$ . Alors  $\left(\frac{1}{\|a\|} a\right)$  est une base orthonormée de  $D$  et

$$p_D: x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|} a | x\right) \left(\frac{1}{\|a\|} a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$

(Attention à ne pas oublier le  $\|a\|^2$ ...)

- Projection orthogonale sur un hyperplan :  $H = (\mathbb{R}a)^\perp$ , où  $a \neq 0_E$ .

$$p_H: x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$

### Propriété : Inégalité de Bessel

Soit  $E$  un espace préhilbertien,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie,  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

## b

### Symétries orthogonales

#### Définition : Symétrie orthogonale

Soit  $E$  un espace préhilbertien,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. On appelle **symétrie orthogonale par rapport à  $F$** , notée  $s_F$ , la symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $F^\perp$ .

Si  $F$  est un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Si  $F$  est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

### Propriétés

- (i)  $\text{Ker}(s_F - id_E) = F$
- (ii)  $\text{Ker}(s_F + id_E) = F^\perp$
- (iii)  $s_F \circ s_F = id_E$
- (iv)  $s_F = 2p_F - id_E$ .
- (v)  $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

### Propriété : Expression d'une réflexion

Soient  $H$  est un hyperplan d'un espace euclidien  $E$  et  $a$  un vecteur non nul de  $H^\perp$ .

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2 \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a.$$

## 7 Distance à un sous-espace

On a vu que si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel  $E$ , alors, pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$

### Propriété

Soit  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$ , et  $x \in E$ .

Alors la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte en le projeté orthogonal  $p_F(x)$  de  $x$  sur  $F$ , et seulement en ce vecteur :

$$d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$$

et si  $d(x, F) = \|x - y\|$  avec  $y \in F$ , alors  $y = p_F(x)$ .

De plus, si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une b.o.n. de  $F$ ,

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^p (e_k | x)^2.$$

Si, enfin,  $F^\perp$  est aussi de dimension finie et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une b.o.n. de  $F^\perp$ ,

$$d(x, F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \sum_{k=p+1}^n (e_k | x)^2.$$

### Corollaire

Soit  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$  une **base orthonormale** de  $E$ ,  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  un repère orthonormal.  $\vec{n}(a_1, \dots, a_n)$  est un vecteur normal de  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $\mathcal{H}$  a une équation de la forme  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$  dans  $\mathcal{R}$ .

### Propriété : Distance à un hyperplan affine

Soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $E$  euclidien.

Soit  $A$  un point de  $\mathcal{H}$  et  $\vec{n}$  un vecteur normal à  $E$ .

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$  est une équation de  $\mathcal{H}$  en repère orthonormal et si  $M(x_1, \dots, x_n)$ , alors

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

## 8 Hyperplans affines d'un espace euclidien

### Définition : Vecteur normal

Soit  $\mathcal{H} = A + \vec{H}$  un hyperplan affine d'un espace euclidien  $E$ ,  $A$  étant un point de  $E$  et  $\vec{H}$  un hyperplan linéaire.

On appelle **vecteur normal** à  $\mathcal{H}$ , tout vecteur  $\vec{n}$  de  $\vec{H}^\perp \setminus \{0_E\}$ .

### Propriétés

- (i) Tous les vecteurs normaux de  $\mathcal{H}$  sont colinéaires.
- (ii) Si  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{H}$ ,  $M \in \mathcal{H} \iff \vec{AM} \perp \vec{n}$ .