Espaces préhilbertiens réels

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

1 Définition d'un produit scalaire

Définition : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.
C'est-à-dire toute application $(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

(i) **Bilinéarité** :
- **Linéarité à gauche :** Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto (x|y)$ est linéaire : $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x_1 + \lambda x_2|y) = (x_1|y) + \lambda(x_2|y).$
- **Linéarité à droite :** Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto (x|y)$ est linéaire : $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x|y_1 + \lambda y_2) = (x|y_1) + \lambda(x|y_2).$

(ii) **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x).$

(iii) **Définie-positivité** :
- **Positivité :** $\forall x \in E, \quad (x|x) \geqslant 0\,;$
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \quad (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Remarques

- **R 1 –** Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.
- **R 2 –** La définie-positivité se résume par $\forall x \neq 0, \quad (x|x) > 0$

Définition : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Remarques

- **R 1 –** Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.
- **R 2 –** On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y\rangle$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$...
- **R 3 –** Ne pas oublier de commencer par vérifier que le produit scalaire est bien **défini** (pas au sens défini-positif !) lorsque cela n'est pas évident.

Exemple

$(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}[X]$, en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition - Propriété : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques

R 1 – **Important** : Si X et Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et de y dans la base canonique, on remarque que $(x|y) = X^{\mathsf{T}} \times Y$.

R 2 – Dans $\mathbb{R}^2$, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$, dans $\mathbb{R}^3$, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall\, x, x', y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x + \lambda x' | y) &= \sum_{i=1}^{n} (x + \lambda x')_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda x'_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \\ &= (x|y) + \lambda (x'|y).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad (x|x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$
- $(x|x) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff \forall\, i, \quad x_i = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

□

Remarque

On peut toujours fabriquer sur le modèle de $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire « canonique » sur E de dimension finie rendant une base canonique (s'il y en a une) orthonormale. Et même, plus généralement, un produit scalaire rendant une base donnée orthonormale.

Par exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, $(P|Q) =$

Définition - Propriété : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) = \mathrm{tr}(A^\mathsf{T} \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Démonstration

$$\mathrm{tr}(A^\mathsf{T} \times B) = \sum_{i=1}^{n} (A^\mathsf{T} \times B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}b_{i,j}.$$ □

b Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition - Propriété

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b fg$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Remarque

Attention, avec des fonctions continues par morceaux seulement, on a presque un produit scalaire : c'est une forme bilinéaires symétrique positive, il manque seulement $(f|g)=0 \Longrightarrow f=0$.

Démonstration

(i) $(\cdot|\cdot)$ est *symétrique* par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

(ii) *Linéarité à gauche* : $\forall\, f, \tilde{f}, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \ \forall\, \lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f+\lambda\tilde{f}|g) &= \int_a^b (f+\lambda\tilde{f})g \\ &= \int_a^b (fg+\lambda\tilde{f}g) \\ &= \int_a^b fg + \lambda\int_a^b \tilde{f}g \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= (f|g)+\lambda(\tilde{f}|g).\end{aligned}$$

La *linéarité à droite* en découle par symétrie.

(iii) *Définie-positivité*

- $\forall\, f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \ (f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale et comme $a<b$)
- $$\begin{aligned}(f|f)=0 &\iff \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\ &\iff f^2\equiv 0 \text{ (car } f^2 \text{ est une fonction continue et positive)} \\ &\iff f\equiv 0\end{aligned}$$ □

Exemple : HP mais Classique

Plus généralement, si I est un intervalle et $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable, de l'inégalité classique

$$|fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$$

on obtient la bonne définition de

$$(f|g) = \int_I fg$$

et on vérifie facilement que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $L^2(I)$.

On définit de la même manière un produit scalaire sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, c'est-à- dire des suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergente.

Alors $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et on pose $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition : Norme euclidienne

Soit $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur x de E, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Remarque

La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

Exemples

E 1 – Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. En particulier, sur $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$.

E 2 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\mathsf{T} \times A)}$.

E 3 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ *(ii)* $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme)*

Propriété : Identités de polarisation

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(i) $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(ii)* $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\forall\, x,y \in E,\ \ (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y) \qquad \text{ie} \qquad \forall\, x,y \in E,\ \ \left|(x|y)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \ x=\lambda y$)

Remarque

L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

Démonstration

Soit λ un nombre réel. On pose $P(\lambda) = \left(x+\lambda y | x+\lambda y\right)$: on a que $P(\lambda)\geqslant 0$ par positivité.
Or

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) \\ &= (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

Cas 1 : Si $(y|y)=0$, alors on doit avoir, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $(x|x)+2\lambda(x|y)\geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $(x|y)=0$ et l'inégalité est vraie.

Cas 2 : Sinon, le polynôme en λ est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leqslant 0$$

et on obtient l'inégalité recherchée.

Cas d'égalité :
Si $y=0$, il y a égalité.
Si $y\neq 0$, il y a égalité si et seulement si $P(\lambda)$ admet une racine (double) si et seulement si $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \ \left(x+\lambda y|x+\lambda y\right)=0$, ce qui équivaut à $\exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \ x+\lambda y=0$ et donc x et y sont liés. □

Exemple

Sur $\mathbb{R}^n$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 \sum\limits_{k=1}^{n} y_i^2$. Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$.

Exercice : CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x\in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. **(a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. **Soit $E = \left\{f\in\mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right),\ \forall\, x\in[a,b]\ f(x)>0\right\}$.**

Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$ **admet une borne inférieure** m **et déterminer la valeur de** m.

---

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\left(x|y\right)| \leqslant ||x||\,||y||$
Preuve :
Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
De plus, $P(\lambda) = \left(x+\lambda y | x+\lambda y\right)$.
Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\left(x|y\right) + ||x||^2$.
On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
Premier cas : si $y = 0$
Alors $|\left(x|y\right)| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
Deuxième cas : $y \neq 0$
Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
Or $\Delta = \left(x|y\right)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $\left(x|y\right)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
Et donc, $|\left(x|y\right)| \leqslant ||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\left(x|y\right)| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.
Supposons que $|\left(x|y\right)| = ||x||\,||y||$.

Premier cas : si $y = 0$
Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|\left(x|y\right)| = |\alpha|.|\left(y|y\right)| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
On pose $A = \left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$.
$A \subset \mathbb{R}$.
$A \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall\, f \in E, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.

D'une part, $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :
$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\forall\, f \in E$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

Exercice : CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. **Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2. **Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**

   On pose : $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. **Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

---

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

   On pose $\forall\, x \in [a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
   h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
   De plus, $\forall\, x \in [a,b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)
   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.

   Donc $\forall\, x \in [a,b]$, $F'(x) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in [a,b]$, $h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
   Soit $f \in E$. $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a<b$ donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)
   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

d Inégalité triangulaire

Propriété : Inégalité de Minkowski

Soit $(E,|\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall\, x,y \in E,\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés (i.e. $y=0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \,/\, x = \lambda y$)
De plus,

$$\forall\, x,y \in E,\quad \Big|\,\|x\| - \|y\|\,\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration

Soient x et y des vecteurs de E.
Il est plus pratique de travailler avec le carré des normes :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y)\\ &= (x|x)+2(x|y)+(y|y)\\ &= \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)\\ &\leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\\ &\leqslant (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

Cas d'égalité : Il y a égalité ssi $(x|y)=|(x|y)|=\|x\|\,\|y\|$
Donc si et seulement si soit $y=0$, soit il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda y$ (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) et $(x|y)=|(x|y)|$, ce qui devient, si $x=\lambda y$, $\lambda(x|x)=|\lambda|(x|x)$ donc $\lambda=|\lambda|$ et $\lambda\geqslant 0$.

Pour l'autre inégalité, on écrit que $\|(x+y)-y\|\leqslant\|x+y\|+\|-y\|$ donc $\|x+y\|\geqslant\|x\|-\|y\|$, puis on échange les rôles de x et y..

□

e Norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Propriété

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration

Soient $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- $\|x\|=\sqrt{(x|x)}\geqslant 0$
- $\|x\|=0\iff\|x\|^2=0\iff(x|x)=0\iff x=0_E$
- $\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x|\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2(x|x)}=|\lambda|\,\|x\|$
- Inégalité triangulaire : c'est l'inégalité de Minkowski démontrée ci-dessus.

□

Définition : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta\in[0,\pi] \text{ et } \cos\theta=\frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Remarques

R 1 – La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

R 2 – Autrement dit, $(x|y)=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$.

Définition : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x\in E$, on définit la distance de x à A par $\mathrm{d}(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\big(\mathrm{d}(x,y)\big)=\inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$.

Remarque

La borne inférieure existe toujours car $\mathscr{E}_x = \left\{ \|x-y\| \ ; \ y \in A \right\}$ est non vide (car A l'est) et minoré (par 0).

II ORTHOGONALITÉ

1 Vecteurs orthogonaux

Définition : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.
x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Remarques

R 1 – 0_E est orthogonal à tout vecteur.

R 2 – La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

Démonstration

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$ □

2 Famille orthonormale

Définition : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$.
$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \text{ avec } i \neq j,\ \ (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!],\ \ (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

Propriété

Toute famille orthogonale *de vecteurs* non nuls *(en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.*

Remarque

C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

Démonstration

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E.
But : $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$.

Alors, si $i \in [\![1,p]\!]$, $(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p | v_i) = \begin{cases} (0_E | v_i) = 0_{\mathbb{R}} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j | v_i) = \lambda_i \|v_i\|^2 \end{cases}$. Or $v_i \neq 0_E$, donc $\lambda_i = 0$. □

Corollaire

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

La réciproque est vraie pour deux vecteurs mais fausse en général si $p \geqslant 3$.

Démonstration

Par récurrence sur p.

Contre-exemple : la famille $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{-1}\right\}$ n'est pas orthogonale (et pour cause, il y 3 vecteurs non nuls en dimension 2 !) et vérifie pourtant la propriété de Pythagore. □

3 Ensembles orthogonaux

Définition : Parties orthogonales

Soient $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E.
On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall (a,b) \in A \times B,\quad (a|b) = 0$. On note $A \perp B$.

Propriété

Si $A, B \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

Démonstration

Si $A \cap B \neq \varnothing$, soit $x \in A \cap B$. Alors $(x|x) = 0$, donc $x = 0$. □

Remarque

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$: leur somme est directe.

Exemple

Parties de $\mathbb{R}^3$ orthogonales d'intersection vide : $A = \mathbb{R}(0,0,1)$ et $B = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,0,0)$.

4 Orthogonal d'un sous-espace

Définition : Orthogonal d'un sous-espace

Soient $(E, |\ )$ un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vecotiel de E. On définit l'**orthogonal de** F comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall\, y \in F,\ \ (x|y) = 0\}$$

$$x \in F^{\perp} \Longleftrightarrow x \in E \text{ et } \forall\, y \in F,\ \ (x|y) = 0$$

(Il est parfois noté F°). Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à F.

Propriété

Soient $(E, |\ )$ préhilbertien réel, et F un sous-espace vectorielde E.
$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

- $0_E \in A^{\perp}$,
- $\forall\, x, x' \in A^{\perp},\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda x + x' \in A^{\perp}$, car $\forall\, y \in A,\ \ (\lambda x + x'|y) = \lambda(x|y) + (x'|y) = 0$.

Donc $A^{\perp}$ est un sev de A.

Comme de plus $A \subset \operatorname{Vect} A$, $(\operatorname{Vect} A)^{\perp} \subset A^{\perp}$ et être orthogonal à tout élément de A implique être orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de A par bilinéarité du produit scalaire, donc $A^{\perp} \subset (\operatorname{Vect} A)^{\perp}$. □

Propriété

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.
Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \forall\, a \in A,\ \ (x|a) = 0$$

Démonstration

$F^{\perp} = A^{\perp}$. □

Remarque

En particulier, connaissant une base de F, il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à F.

Propriété

Soit E un espace préhilbertien réel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

(i) $E^{\perp} = \{0\}$ *et* $\{0\}^{\perp} = E$.

(ii) $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$,

(iii) *La somme est directe :* $F + F^{\perp} = F \oplus F^{\perp} = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$,

(iv) *Si* $F \subset G$, *alors* $G^{\perp} \subset F^{\perp}$,

(v) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ *et* $(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$.

Démonstration

- $0 \in E^\perp$, et si $x \in E^\perp$, $(x|x) = 0$ donc $\|x\| = 0$ et $x = 0$.
- Si $x \in F$, pour vecteur y de $F^\perp$, $(x|y) = 0$, d'où le résultat.
- Comme les ensembles F et $F^\perp$ sont orthogonaux, $F \cap F^\perp = \varnothing$ ou $F \cap F^\perp = \{0\}$, mais $0 \in F \cap F^\perp$.
- Soit $x \in G^\perp$. Pour tout vecteur y de F, $y \in G$, et donc $(x|y) = 0$. Ainsi $x \in F^\perp$.
-

□

Remarques

R 1 – Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

R 2 – Pour $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$, on verra que les inclusions sont des égalités si on ajoute une hypothèse de dimension finie sur E.

On peut donner comme contre-exemples, dans $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. C'est un exercice très classique de montrer que $F^\perp = \{0\}$ à l'aide du théorème de Weierstrass, donc $\left(F^\perp\right)^\perp = E$ et

$$F \subsetneq \left(F^\perp\right)^\perp = E.$$

Si, de plus, $G = \{t \mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P \in F\}$, alors $G^\perp = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$ d'où

$$E = (F \cap G)^\perp \supsetneq F^\perp + G^\perp = \{0\}.$$

Exercice : CCINP 39

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.

Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).

Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

---

1. (a) Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.

Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

(b) La suite nulle appartient à l^2.

Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.

On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)

Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.

Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.

Donc $z \in l^2$.

On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = x_n + \lambda y_n$.
Ainsi, $\varphi(x+\lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
Donc φ est linéaire sur l^2. (*)
$\forall\, x = (x_n) \in l^2,\ |x_p|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$, donc $|x_p| \leqslant ||x||$.

Donc $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2,\ |\varphi(x)| = |x_p| \leqslant ||x||$ (**)
D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2.

3. Analyse :
Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\perp}$.
Alors $\forall\, y \in F,\ (x|y) = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N},\ x_p = 0$.
C'est-à-dire $x = 0$.
Synthèse :

la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.
Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.

On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

III ESPACES OU SOUS-ESPACES EUCLIDIENS

Remarque : Rappel

Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$. Il est facile de voir que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).

On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|e_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\varepsilon_1' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\varepsilon_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\varepsilon_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Définition : Orthonormalisation de Schmidt

Étant donné $(E, |)$ un espace euclidien, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall\, i < j,\quad (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs : $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$.

Remarque

Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure.

Propriété

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \ldots, \dfrac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une b.o.n de E.

Démonstration

- $1^{\text{ère}}$ **étape : Orthogonalisation**.
  - ⋆ **On pose** $\boxed{\varepsilon_1 = e_1.}$ (Et alors $\varepsilon_1 \neq 0_E$.)
  - ⋆ **On cherche** $\varepsilon_2 \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \mathrm{e}_2)$ **tel que** $(\varepsilon_1 | \varepsilon_2) = 0$.
    On cherche donc un réel λ tel que $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda \varepsilon_1$ et $(\varepsilon_1 | \varepsilon_2) = 0$.
    Donc $\lambda \|\varepsilon_1\|^2 + (\varepsilon_1 | e_2) = 0$, puis $\lambda = -\dfrac{(\varepsilon_1 | e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2}$.
    Finalement, $\boxed{\varepsilon_2 = e_2 - \dfrac{(\varepsilon_1 | e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2} \varepsilon_1.}$
    De plus, $\varepsilon_2 \neq 0$ car (e_1, e_2) est une famille libre, et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. (L'inclusion $\subset$ est immédiate, l'inclusion $\supset$ vient du fait qu'on puisse exprimer facilement e_2 comme combinaison linéaire de ε_1 et ε_2 : $e_2 = \varepsilon_2 + \frac{(\varepsilon_1 | e_2)}{\|\varepsilon_1\|^2} \varepsilon_1$.)
  - ⋆ Supposons, par récurrence, que l'on ait construit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}$ tels que
    - $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
    - pour tout entier $i \in [\![2, j-1]\!]$, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_i)$
    - pour tout entier $i \in [\![2, j-1]\!]$, la composante de ε_i sur e_i est 1.

    On cherche des réels λ_k tels que le vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$: $(\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0$.

    Donc, si $i \in [\![1, j-1]\!]$, $(\varepsilon_i | e_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k (\varepsilon_i | \varepsilon_k) = 0$.

    D'où $(\varepsilon_i | e_j) + \lambda_i \left\|\varepsilon_i\right\|^2 = 0$, puis $\lambda_i = -\dfrac{(\varepsilon_i | e_j)}{\left\|\varepsilon_i\right\|^2}$.

    La récurrence est alors établie avec $\boxed{\varepsilon_j = e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \dfrac{(\varepsilon_k | e_j)}{\left\|\varepsilon_k\right\|^2} \varepsilon_k.}$

    En effet :
    - $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls,
    - $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_j)$.
      En effet, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{j-1})$, donc l'inclusion $\subset$ est immédiate et l'inclusion $\supset$ vient du fait que l'on puisse exprimer facilement e_j comme combinaison linéaire des ε_i, pour $i \in [\![1, j]\!]$: $e_j = \varepsilon_j + \sum_{k=1}^{j-1} \dfrac{(\varepsilon_k | e_j)}{\left\|\varepsilon_k\right\|^2} \varepsilon_k$.
    - La composante de ε_j sur e_j est 1.

  On obtient n vecteurs non nuls orthogonaux en dimension n : $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une **base orthogonale** *de E.*
- $2^{\text{ème}}$ **étape : Normalisation**.
  On obtient alors très facilement un b.o.n. de E :

$$\boxed{\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right).}$$

□

Remarque

Matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & & * \\ & 1 & & \\ & & & \\ & (0) & 1 & * \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

à la base de la décomposition QR.

Corollaire

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Démonstration

C'est en effet encore un espace euclidien, muni du produit scalaire restreint à ce sous-espace. □

Corollaire : Théorème de la base orthonormale incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

Démonstration

Il suffit d'appliquer l'orthonormalisation de Schmidt à cette famille libre complétée en une base : les vecteurs de la famille orthonormale seront inchangés. □

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété

Soit $(E, |\,)$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormale** *de E : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = (e_i | x) \qquad (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\intercal \times Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = X^\intercal \times X \qquad \mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Démonstration

- Si $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}(e_i|x) &= \left(e_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^n x_j (e_i|e_j)\\ &= \sum_{j=1}^n x_j \delta_{i,j}\\ &= x_i\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x|y) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(e_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j e_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j)\\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \delta_{i,j}\\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i\end{aligned}$$

- $\|x\|^2 = (x|x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, d'après ce qui précède. □

Propriétés

Soit E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.

(i) Si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1} = P^\top$.

(ii) Si $u \in \mathscr{L}(E)$, la formule de changement de base s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^\top \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \pm 1$: 1 si elles ont même orientation, -1 sinon.

Remarques

R 1 – La réciproque est fausse, il ne suffit pas que ce déterminant vale ± 1 pour que les bases soient orthonormales.

R 2 – Faciles, les changements de bases orthonormales !!!

Démonstration

(i) $P_{i,j} = \left(e_i \middle| e'_j\right)$ (coordonnée de e'_j selon e_i.)
$(P^{-1})_{i,j} = \left(e'_i \middle| e_j\right) = \left(e_j \middle| e'_i\right) = P_{j,i} = (P^\top)_{i,j}$.

(ii) Immédiat.

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \det P$ or $PP^\top = I_n$ donc $(\det P)^2 = 1$. □

3 Isomorphisme avec le dual

Théorème : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \longmapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

4 Produit mixte

Propriétés

*Soit E euclidien orienté et $\mathscr{B}$ est une base orthonormale **directe**.*
$\det_{\mathscr{B}}$ *ne dépend pas de $\mathscr{B}$.*

Démonstration

$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' \det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}$. □

Définition : Produit mixte

On appelle **produit mixte** sur E euclidien orienté de dimension n le déterminant de n vecteurs dans n'importe quelle base orthonormale directe.

On le note $[v_1, \ldots, v_n]$, pour $v_1, \ldots, v_n \in E$.

Propriétés

Soit E euclidien orienté.

(i) $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto [v_1, \ldots, v_n]$ *est une forme n-linéaire alternée sur E.*

(ii) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une bond, $[e_1, \ldots, e_n] = 1$ et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une boni, $[e_1, \ldots, e_n] = -1$ (réciproque fausse).

(iii) $[v_1, \ldots, v_n] = 0$ si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.

(iv) Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $[u(v_1), \ldots, u(v_n)] = \det u \times [v_1, \ldots, v_n]$.

Remarque

Comme, si E est de dimension 3 et $x, y \in E$, $[x, y, \cdot] \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, avec l'isomorphisme de la partie précédente, il existe une unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $z \in E$, $[x, y, z] = (a|z)$. Ce vecteur a est appelé produit vectoriel de x et y, noté $x \wedge y$.

On a alors $[x, y, z] = (x \wedge y|z)$ d'où l'appellation produit mixte.

Propriété

Soit E euclidien orienté.

(i) Si $\dim E = 2$, $[\vec{u}, \vec{v}]$ représente le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(ii) Si $\dim E = 3$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démonstration

C'est évident si $\vec{u}, \vec{v}$ (respectivement $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) sont liés. Sinon :

(i) Si $\dim E = 2$, soit (e_1, e_2) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors $\vec{u} = ce_1$ et $\vec{v} = de_1 + he_2$, où h hauteur et c côté, donc $[\vec{u}, \vec{v}] = ch[e_1, e_2] = \pm ch$ aire orientée du parallélogramme.

(ii) Si $\dim E = 3$, soit (e_1, e_2, e_3) base orthonormale obtenu par orthonormalisation de Schmidt de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Alors $\vec{u} = ce_1$, $\vec{v} = de_1 + he_2$ et $\vec{w} = xe_1 + ye_2 + He_3$, où H hauteur et ch aire de la base. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = chH[e_1, e_2, e3] = \pm chH$ volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

□

5 Propriétés de $F^{\perp}$

Théorème

Si F est un sev de **dimension finie** *de E préhilbertien réel, alors*

$$E = F \oplus F^{\perp} = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

Le sev $F^{\perp}$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** *de F, il est unique.*

Démonstration

- Si $F = \{0_E\}$, on a vu que $F^{\perp} = E$ et alors le résultat est immédiat.
- De même, si $F = E$, on a vu que $F^{\perp} = \{0_E\}$ et alors le résultat est immédiat.
- Sinon, on a déjà que $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

  De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, et $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i \in F$, $x = y + (x - y)$ avec $x - y \in F^{\perp}$ car pour tout i, $(x - y|e_i) = 0$.
  D'où le résultat.

  Unicité : Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors F et G sont orthogonaux, donc, si E est de dimension finie, $G \subset F^{\perp}$ et $\dim G = \dim E - \dim F = \dim F^{\perp}$, donc $G = F^{\perp}$.
  Si E n'est pas de dimension finie ? si $x \in F^{\perp}$, $x = x_F + x_G$ et $x_F = x - x_G \in F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ donc $x = x_G \in G$ et $G = F^{\perp}$.

$\square$

Corollaire

Soit E un espace **euclidien**, *F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(i) $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$

(ii) $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

(iii) $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

(iv) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

Remarque

On retiendra qu'**en dimension finie**, il n'y a plus trop de problème.

Démonstration

(i) : Vu dans la précédente démonstration.
(ii) : Une inclusion connue et dimensions.
(iii) et (iv) : $F^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} F = E$: unicité du supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$.
$F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F + G)^{\perp}$ est direct.
Donc $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$. (Vrai même s'ils ne sont pas de dimension finie.)
Puis $(F \cap G)^{\perp} = \left(F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}\right)^{\perp} = ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

$\square$

Exercice : CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

1. **Soit A un sous-espace vectoriel de E.**
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. **Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.**
   - **(a) Démontrer que** $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   - **(b) Démontrer que** $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

---

1. On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. (*)
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in A,\ x \in (A^{\perp})^{\perp}$.

Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^{\perp}$ donc $\dim A = n - \dim A^{\perp}$.

De même, $E = A^{\perp} \oplus \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim A^{\perp}$.
Donc $\dim\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \dim A$. (**)
D'après (*) et (**), $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

2. (a) Procédons par double inclusion.
Prouvons que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.

Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Soit $y \in F + G$.
Alors $\exists (f, g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.
$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \text{ et } x \in F^{\perp}}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \text{ et } x \in G^{\perp}}} = 0.$
Donc $\forall\, y \in (F+G)$, $(x \mid y) = 0$.
Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.
Prouvons que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Soit $x \in (F+G)^{\perp}$.
$\forall\, y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.
Donc $x \in F^{\perp}$.
De même, $\forall\, z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.
Donc $x \in G^{\perp}$.
On en déduit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

(b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.

Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = F \cap G$.
Donc $\left(\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.
C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

Exemple : Classique

$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

Exercice : CCINP 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t A B)$ où tr désigne la trace et ${}^t A$ désigne la transposée de la matrice A.

1. **Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.**
2. **On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.**
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^t A = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) **Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.**
   (b) **Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.**
3. **Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.**
Déterminer $F^{\perp}$.

---

1. $\langle\,,\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
$\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t A B) = \mathrm{tr}({}^t\left({}^t A B\right)) = \mathrm{tr}({}^t B A) = \langle B, A\rangle$.
Donc $\langle\,,\rangle$ est symétrique.
On en déduit que $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)
Soit $A = \left(A_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.

$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^{n} ({}^t A A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ({}^t A)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$ donc $\langle A, A\rangle \geqslant 0$.

Donc $\langle,\rangle$ est positive. (2)
Soit $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$ telle que $\langle A,A\rangle=0$.

Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k,i}^2=0$. Or, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i}^2\geqslant 0$.
Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i}=0$. Donc $A=0$.
Donc $\langle,\rangle$ est définie. (3)
D'après (1),(2) et (3), $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Remarque importante : Soit $(A,B)\in E^2$.

On pose $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=\left(B_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Alors $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}({}^tAB)=\sum\limits_{i=1}^{n}({}^tAB)_{i,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left({}^tA\right)_{i,k}B_{k,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k,i}B_{k,i}$.
Donc $\langle,\rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M\in S_n(\mathbb{R})\cap A_n(\mathbb{R})$.
alors ${}^tM=M$ et ${}^tM=-M$ donc $M=-M$ et $M=0$.
Donc $S_n(\mathbb{R})\cap A_n(\mathbb{R})=\{0\}$. (1)
Soit $M\in E$.

Posons $S=\dfrac{M+{}^tM}{2}$ et $A=\dfrac{M-{}^tM}{2}$.
On a $M=S+A$.
${}^tS={}^t\left(\dfrac{M+{}^tM}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM+{}^t({}^tM)\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM+M\right)=S$, donc $S\in S_n(\mathbb{R})$.
${}^tA={}^t\left(\dfrac{M-{}^tM}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM-{}^t({}^tM)\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM-M\right)=-A$, donc $A\in A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $E=S_n(\mathbb{R})+A_n(\mathbb{R})$. (2)
D'après (1) et (2), $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R})\subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.
Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall A\in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S,A\rangle=0$.
Soit $A\in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S,A\rangle=\mathrm{tr}({}^tSA)=\mathrm{tr}(SA)=\mathrm{tr}(AS)=\mathrm{tr}(-{}^tAS)=-\mathrm{tr}({}^tAS)=-\langle A,S\rangle=-\langle S,A\rangle$.
Donc $2\langle S,A\rangle=0$ soit $\langle S,A\rangle=0$.
On en déduit que $S_n(\mathbb{R})\subset A_n(\mathbb{R})^\perp$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^\perp=n^2-\dim A_n(\mathbb{R})$.

Or, d'après 2.(a), $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R})=n^2-\dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R})=\dim A_n(\mathbb{R})^\perp$. (2)
D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R})=A_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. On introduit la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $E_{i,j}=\left(e_{k,l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l}=\begin{cases}1 & \text{si } k=i \text{ et } l=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
On a alors $F=\mathrm{Vect}\left(E_{1,1},E_{2,2},\dots,E_{n,n}\right)$.
Soit $M=\left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M\in F^\perp\iff\forall i\in[\![1,n]\!],\ \langle M,E_{i,i}\rangle=0\iff\forall i\in[\![1,n]\!],\ m_{i,i}=0$.
Donc $F^\perp=\mathrm{Vect}\left(E_{i,j}\text{ telles que }(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\text{ et }i\neq j\right)$.
En d'autres termes, $F^\perp$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

6 Projections et symétries orthogonales

a Projections orthogonales

Définition : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.
On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Remarque

Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Remarque : Illustration

Propriétés

- $p_F \in \mathscr{L}(E)$ *et* $p_F = p_F^2$
- $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$
- $F^{\perp} = \operatorname{Ker} p_F$
- $\operatorname{Im} p_F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p_F = E$
- $\forall\, x \in E,\quad p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

Remarque

Le projeté orthogonal de $x \in E$ est le seule vecteur $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$. Pratique pour le trouver !

Exercice : CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. **Démontrer que** $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ **définit un produit scalaire sur** E.
2. **Soit F le sous-espace vectoriel engendré par** $f : x \mapsto \cos x$ **et** $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

---

1. On pose $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.

   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)
   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.

Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)
D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.
$x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
De plus, si on note h l'application $x \mapsto \frac{1}{2}$,
$(h|f) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \mathrm{Vect}(f,g)$).
On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

Propriété : Expression en base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1,\dots,e_p)$ une ***base orthonormale*** *de F. Alors*

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$$

Démonstration

D'après la démonstration du supplémentaire orthogonal. □

Remarque

On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ i.e.

$$e_j = \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k. \tag{1}$$

Donc, si l'on note $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$, (**??**) est la décomposition de e_j dans $F^\perp \oplus F$. Donc $\varepsilon_j = p_{F^\perp}(e_j)$ et $-\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k = p_F(e_j)$.

De plus, ici $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de F, donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_{j-1}}{\left\|\varepsilon_{j-1}\right\|}\right)$ en est une b.o.n. et $p_F(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}\middle| e_j\right)\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k$, d'où l'expression des λ_k que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

Cas particulier

- Projection orthogonale sur une droite *: $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et*

$$p_D : x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|}a\middle|x\right)\left(\frac{1}{\|a\|}a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- Projection orthogonale sur un hyperplan *: $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.*

$$p_H : x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

Démonstration

Pour la projection sur un hyperplan, si on nomme D la droite $\mathbb{R}a = H^\perp$, on a que $E = H \overset{\perp}{\oplus} D$ et

$$id_E = p_H + p_D = p_H + \frac{(a|\cdot)}{\|a\|^2}a. \quad \square$$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de p_P ? Vecteur normal à P : $(1,0,-1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x,y,z)\big) = (x,y,z) - \frac{(1,0,-1)\cdot(x,y,z)}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1) = \frac{1}{2}(e_1+e_3)$, $p_P(e2) = e_2$ et $p_P(e3) = \frac{1}{2}(e_1+e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \mathrm{Im}(p_F)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^\perp = \mathrm{Ker}\, p_F$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes nulles.

Propriété : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall\, x \in E, \quad \left\|p_F(x)\right\| \leqslant \|x\|$$

Démonstration

C'est le théorème de Pythagore : $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$ donc

$$\|x\|^2 = \left\|p_F(x)\right\|^2 + \left\|x - p_F(x)\right\|^2 \geqslant \left\|p_F(x)\right\|^2.$$

$\square$

b Symétries orthogonales

Définition : Symétrie orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On appelle **symétrie orthogonales par rapport à** F, notée s_F, la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.
Si F est un hyperplan, on parle de **réflexion**.
Si F est une droite vectorielle, on parle de **retournement**.

Remarque : Illustration

Propriétés

(i) $\operatorname{Ker}(s_F - id_E) = F$

(ii) $\operatorname{Ker}(s_F + id_E) = F^\perp$

(iii) $s_F \circ s_F = id_E$

(iv) $s_F = 2p_F - id_E$.

(v) $s_F = p_F - p_{F^\perp}$

Exemple

Symétrie orthogonale par rapport au plan P de l'exemple précédent.

Comme $s_P = 2p_P - id_{\mathbb{R}^3}$, on obtient l'expression générale

$$s_P\big((x,y,z)\big) = (z,y,x)$$

Et alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = 2\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) - I_3$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F = \operatorname{Ker}(s_F - id)$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^\perp = \operatorname{Ker}(s_F + id)$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes avec des -1 sur la diagonale.

À savoir retrouver :

Propriété : Expression d'une réflexion

Soient H est un hyperplan d'un espace euclidien E et a un vecteur non nul de $H^\perp$.

Démonstration

$s_H(x) = 2p_H(x) - x = 2(x - p_{H^\perp}) - x = x - 2p_{H^\perp}$ □

7 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x,F) = \inf\limits_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf\limits_{y\in F} \|x-y\|$

Propriété

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.
Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x, p_F(x)) = \left\|x - p_F(x)\right\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F) = \left\|x-y\right\|$ avec $y \in F$, alors $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une b.o.n. de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|p_{F^\perp}(x)\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

Démonstration

Par théorème de Pythagore, si $y \in F$,

$$\left\|x - p_F(x) + p_F(x) - y\right\|^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 + \left\|p_F(x) - y\right\|^2.$$

Donc $\left\|p_F(x) - y\right\| \leqslant \left\|x-y\right\|$ avec égalité si et seulement si $\left\|p_F(x)-y\right\| = 0$ c'est-à-dire $y = p_F(x)$.

De plus,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x - p_F(x))^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2$$

car $(e_k|p_F(x)) = 0$ pour $k \geqslant p+1$. Et

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 = \|x\|^2 - \left\|p_F(x)\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2$$

par théorème de Pythagore. □

Remarques

R 1 – Pratique : plutôt que de calculer une bon de F (orthonormalisation de Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues. On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

R 2 – Si F n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $\mathrm{d}(\exp, F)$ n'est pas atteinte car on peut montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi, dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles ?).
On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $\mathrm{d}(x,F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x - y \in F^\perp$ et on peut montrer que si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^\perp = \{0\}$.

Exercice : CCINP 81

On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. **Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.**

3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^{\perp}$.

4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

---

1. On a immédiatement $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$,
   $M \in \mathscr{F}^{\perp} \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathscr{F}^{\perp} \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathscr{F}^{\perp} \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathscr{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{F}^{\perp}$ donc (A, B) est une base de $\mathscr{F}^{\perp}$.

3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^{\perp}$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}^{\perp}$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On note $d(J, \mathscr{F})$ la distance de J à $\mathscr{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)||$ où $p_{\mathscr{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^{\perp}$.
   Donc $p_{\mathscr{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

Exercice : CCINP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

---

1. On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $(A + A'|B) = \left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''$.
   Donc $(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B)$.
   $(\alpha A|B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha (A|B)$.
   On en déduit que $(.|.)$ est linéaire par rapport à sa première variable.

De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(.|.)$ est symétrique.
Donc $(.|.)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

$(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(.|.)$ est positive. (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.

Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
Donc $(.|.)$ est définie. (***)
D'après (*), (**) et (***), $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ car $\forall (a,b,d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = 0$.

On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $d(A,F) = ||A - p_F(A)|| = ||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|| = 1$.

8 Hyperplans affines d'un espace euclidien

Définition : Vecteur normal

Soit $\mathcal{H} = \mathrm{A} + \vec{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E, A étant un point de E et $\vec{H}$ un hyperplan linéaire.
On appelle **vecteur normal** à $\mathcal{H}$, tout vecteur $\vec{n}$ de $\vec{H}^{\perp} \setminus \{0_E\}$.

Propriétés

(i) Tous les vecteurs normaux de $\mathcal{H}$ sont colinéaires.

(ii) Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$, $\mathrm{M} \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n}$.

Démonstration

$\vec{H} = \mathrm{Vect}\,\vec{n}$. □

Corollaire

*Soit $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormale** de E, $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \mathcal{B})$ un repère orthonormal.*
$\vec{n}(a_1, \dots, a_n)$ est un vecteur normal de $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathcal{H}$ a une équation de la forme $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ dans $\mathcal{R}$.

Exemples

E 1 – Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, si $ax+by=c$ est une équation de $\mathscr{H}$ dans un repère orthonormal, alors $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal à $\mathscr{H}$.

E 2 – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, si $ax+by+cz=d$ est une équation de $\mathscr{H}$ dans un repère orthonormal, alors $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{H}$.

Propriété : Distance à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de E euclidien.
Soit A un point de $\mathscr{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à E.

$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{H}) = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$ est une équation de $\mathscr{H}$ en repère orthonormal et si $\mathrm{M}(x_1,\ldots,x_n)$, alors

$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{H}) = \frac{|a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.$$

Exemple

Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathscr{D}: 3x+4y=7$ et $\mathscr{D}': 5x-12y=-7$.

Démonstration

$$\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathscr{H}) = \mathrm{d}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\vec{H}\right) = \left\|p_{\vec{H}^\perp}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right\| = \left\|\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Avec $\vec{n}(a_1,\ldots,a_n)$,

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n} = a_1\left(x_1-x_1^{(0)}\right)+\cdots+a_n\left(x_n-x_n^{(0)}\right) = a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b.$$

□