

# e3a 2017 MP : Maths 1

## EXERCICE n° 1

Dans tout l'exercice  $\alpha$  désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit un entier  $n$  strictement positif.

a) Justifier l'existence de l'intégrale notée  $I_n$  égale à  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$ .

b) En effectuant le changement de variable  $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$  dans l'intégrale  $I_n$ , montrer que l'application  $u \mapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et exprimer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du$  en fonction de l'intégrale  $I_n$ .

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geq 0, \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u.$$

2) Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$  pour  $u \geq 0$ .

3) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la suite  $(v_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du.$$

a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini est égale à  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  où  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$ .

b) En déduire un équivalent de l'intégrale  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini.

4) a) Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$  où  $I_n$  est la suite définie à la question 1).

b) Pour  $x \in \mathbb{R}$  tel que :  $|x| < R$ , on note  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$ . Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha-x} dt \quad \text{pour } |x| < R.$$

## EXERCICE n° 2

$E$  est un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  muni du produit scalaire  $(x, y) \mapsto (x|y)$ . On rappelle qu'un automorphisme de  $E$  est un endomorphisme **bijectif** de  $E$ . On considère un automorphisme  $u$  de  $E$  qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

- 1) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $A$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- a) Étant donnés deux entiers  $i, j$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $a_{i,j}$  le  $(i, j)$ -ème coefficient de  $A$ . Justifier :

$$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i).$$

- b) En déduire l'égalité :  ${}^t A = -A$ .
- 2) Montrer que l'entier  $n$  est un nombre pair.  
*Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice  $A$ .*
- 3) On appelle  $v$  l'automorphisme égal à  $u \circ u$ . Montrer que  $v$  est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de  $E$ .
- 4) Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $v$ , montrer que  $\lambda$  est strictement négative.
- 5) On note  $x$  un vecteur propre de l'automorphisme  $v$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $x$  et  $u(x)$ .

a) Montrer que la dimension de  $F$  est égale à 2.

b) Montrer que  $F$  est stable par l'automorphisme  $u$ , en déduire que l'orthogonal  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ . On notera  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  les applications induites par l'automorphisme  $u$  sur les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $F^\perp$ .

c) Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $v$ , on pose  $a = \sqrt{-\lambda}$ . Montrer qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $F$  telle que la matrice de  $u_F$  dans la base  $\mathcal{B}'$  soit égale à  $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ .

*Indication : On pourra considérer les vecteurs  $e'_1 = \frac{1}{\|x\|}x$  et  $e'_2 = \frac{1}{a\|x\|}u(x)$ .*

d) Montrer que l'endomorphisme  $u_{F^\perp}$  est un automorphisme vérifiant la relation (1).

- 6) On suppose dans cette question que l'espace euclidien  $E$  est de dimension 4. Soit  $u$  un automorphisme de  $E$  vérifiant la relation (1).

Montrer qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}''$  de  $E$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  non nuls tels que la matrice de l'automorphisme  $u$  dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

## EXERCICE n° 3

### Première partie

Soit un réel  $a \in ]0, 29[$ , on considère la fonction  $H$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = 10 t^3 + 31 t^2 + 71 t - a.$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel noté  $\ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  tel que :  $H(\ell) = 0$ .

2) On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$ .

Pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation  $y = H(x)$ , au point de coordonnées  $(u_n, H(u_n))$ .

a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}.$$

b) Déterminer le sens de variation de l'application  $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \frac{H(t)}{H'(t)} \end{cases}$ .

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[ \ell, \frac{1}{2} \right].$$

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)| \leq 46|u_n - \ell|^2.$$

d) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{46 |u_n - \ell|^2}{71}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{7 |u_n - \ell|^2}{10}$$

e) Pour tout réel  $a \in ]0, 29[$ , vérifier que  $u_2$  est une valeur approchée de  $\ell$  à 0.03 près.

3) Application informatique. On utilisera le langage Python sans aucune bibliothèque supplémentaire. Écrire une fonction *suite(a, n)* en langage Python qui prend en entrée le paramètre  $a$  et un entier  $n$  et qui renvoie la liste  $[u_0, u_1, \dots, u_n]$  des  $n + 1$  premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la question 2) en fonction de  $a$ .

## Deuxième partie

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs et une variable aléatoire  $X$  définie sur  $\Omega$  telle que  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  et dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(X = 0) &= \frac{a}{100} \\ P(X = 1) &= \frac{b}{100} \\ P(X = 2) &= \frac{2}{5} \\ P(X = 3) &= \frac{21}{100} \\ P(X = 4) &= \frac{1}{10} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire  $Y$  est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [0, 1], G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n.$$

- 1) Déterminer la relation liant les réels  $a$  et  $b$ .
- 2) Déterminer la fonction génératrice  $G_X$  de la variable aléatoire  $X$ .
- 3) On suppose qu'une population évolue par générations. Étant donné un entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $Z_n$  la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus de la  $n$ -ième génération. Le nombre de descendants de chaque individu d'une génération quelconque suit la loi de la variable aléatoire  $X$ . On pose  $Z_0 = 1$ .  
On admet que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction génératrice  $G_{Z_n}$  de la variable aléatoire  $Z_n$  vérifie la relation de récurrence :

$$G_{Z_{n+1}} = G_X \circ G_{Z_n}$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à la probabilité d'extinction de la population à long terme, ce qu'on mesure par le comportement asymptotique de la suite  $(P(Z_n = 0))_{n \in \mathbb{N}}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $w_n = P(Z_n = 0)$ .

- a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $w_n$  en fonction de la fonction génératrice  $G_{Z_n}$ .
- b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $w_{n+1}$  en fonction de  $w_n$ .
- c) Montrer que  $G_X \left( \left[0, \frac{1}{2}\right] \right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Montrer alors que la suite  $(w_n)$  est convergente vers un réel noté  $L(a)$  appartenant à  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

- d) Montrer que le réel  $L(a)$  est égal au réel  $\ell$  de la partie I, en déduire une approximation de la probabilité  $L(a)$  d'extinction de la population à long terme en fonction de  $a$ .

## EXERCICE n° 4

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord ( $N$ ), soit vers l'Est ( $E$ ).

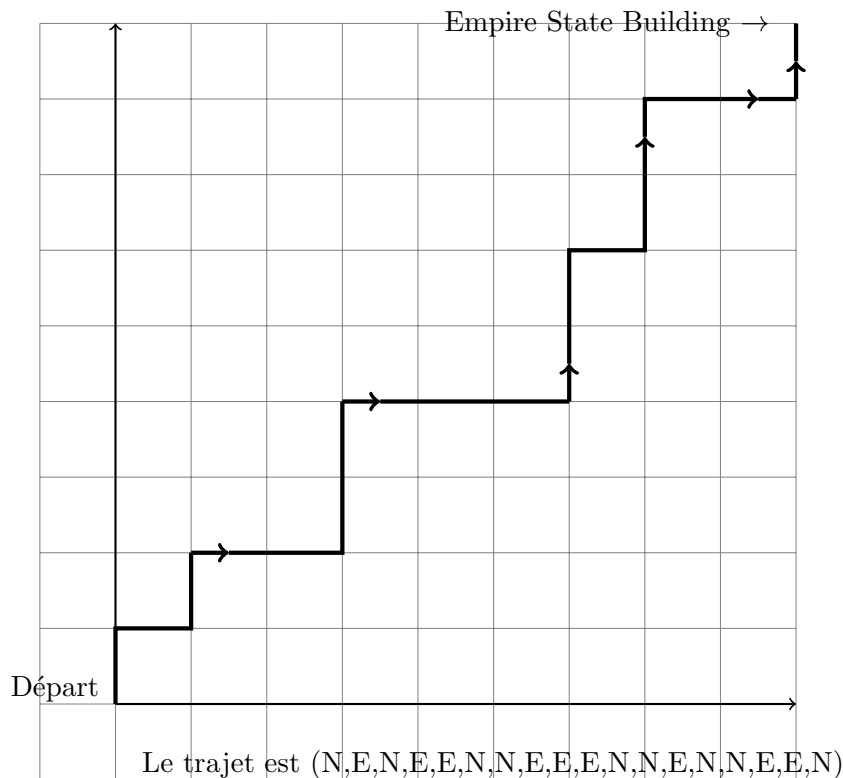
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit  $l$  un entier naturel non nul. Un trajet de  $l$  étapes est représenté par une suite  $(u_1, u_2, \dots, u_l)$  avec, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $l$ ,  $u_i = E$  si, au  $i$ -ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et  $u_i = N$  si, au  $i$ -ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.

On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées  $(x, y)$  où  $x$  représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et  $y$  le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de  $l$  étapes ( $l$  est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées  $(x_k, y_k)$  pour  $0 \leq k \leq l$  définies par récurrence par :

$x_0 = y_0 = 0$   
pour  $1 \leq k \leq l$ ,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si } u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si } u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



- 1) a) Écrire en langage Python une fonction  $deplacement(L, a, b)$  dont la valeur est  $(a, b + 1)$  si  $L = "N"$  et  $(a + 1, b)$  si  $L = "E"$ .
  - b) Écrire une fonction  $chemin(m)$  où  $m$  est une chaîne constituée des caractères "N" et "E" et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.
- 2) a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement  $l$  étapes où  $l \in \mathbb{N}^*$ .
  - b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées  $(3, 2)$  est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes  $N$  et trois étapes  $E$ , en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées  $(3, 2)$ .
  - c) Plus généralement, soit un point  $M$  de coordonnées  $(a, b)$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point  $M$ .
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle  $U_n$  l'événement "Le chemin passe pour la première fois à l'étape  $2n$  par un point de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ ". On pourra noter  $N_k$  l'événement "à l'étape  $k$ , le déplacement se fait vers le Nord" et  $E_k$  l'événement "à l'étape  $k$ , le déplacement se fait vers l'Est".
  - a) Calculer la probabilité de l'événement  $U_1$ .
  - b) Soient quatre entiers naturels  $a, b, c, d$ , on note  $C_{(a,b)}^{(c,d)}$  l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées  $(a, b)$  au point de coordonnées  $(c, d)$ . Déterminer le cardinal de l'ensemble  $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$  des chemins reliant le point de coordonnées  $(0, 1)$  au point de coordonnées  $(n-1, n)$  pour  $n \geq 2$ .
  - c) Soit  $n \geq 2$ . On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées  $(0, 1)$  au point de coordonnées  $(n-1, n)$  et coupant la droite d'équation  $y = x$  est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées  $(1, 0)$  au point de coordonnées  $(n-1, n)$ . Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées  $(0, 1)$  au point de coordonnées  $(n-1, n)$  et coupant la droite d'équation  $y = x$ .  
Soient quatre entiers naturels  $a, b, c, d$ , on note  $T_{(a,b)}^{(c,d)}$  l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées  $(a, b)$  au point de coordonnées  $(c, d)$  ne coupant pas la droite d'équation  $y = x$ .
  - d) En déduire le cardinal de l'ensemble  $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$  des chemins reliant le point de coordonnées  $(0, 1)$  au point de coordonnées  $(n-1, n)$  ne coupant pas la droite d'équation  $y = x$ .
  - e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble  $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$  des chemins reliant le point de coordonnées  $(1, 0)$  au point de coordonnées  $(n, n-1)$  ne coupant pas la droite d'équation  $y = x$ .
  - f) En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  :

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

puis que

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}.$$

4) On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$ .

a) Déterminer le réel  $a$  tel que :

$$\ln \left( \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante  $\gamma$  réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme  $\sum_{n=1}^{N-1} \ln \left( \frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ , montrer qu'il existe une constante  $k > 0$  telle que :

$$v_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$ , en déduire la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$ , que peut-on en déduire ?