# Sujet Mines - Ponts :

Traiter d'abord l'exercice I sur la première page (séries entières, facile).

Problème (Mines-Ponts, difficile) :

## Sous-groupes compacts du groupe linéaire

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$ et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de $E$. Pour tout endomorphisme $u$ de $E$, on note $u^i$ l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ ($i$ fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\varnothing$.

On rappelle qu'un sous-ensemble $C$ de $E$ est *convexe* si pour tous $x, y$ dans $C$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, ...., a_p$ d'éléments de $C$ convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, ...., \lambda_p$ dont la somme égale 1, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

Si $F$ est un sous-ensemble quelconque de $E$, on appelle *enveloppe convexe* de $F$, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de $E$ (au sens de l'inclusion) contenant $F$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, ...., \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant $n$ lignes et $m$ colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice $A$ à coefficients réels est notée $A^T$. La trace de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre $n$.

*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

## A Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

# B Autres préliminaires

*Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.*

4. Soit $K$ un sous-ensemble compact de $E$ et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application $\phi$ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans $E$ telle que $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de $E$.

5. On désigne par $g$ un endomorphisme de $E$ tel que pour tous $x, y$ dans $E$, $\langle x, y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.

   Montrer qu'il existe un nombre réel positif $k$ tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $E$ et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)

   En déduire que $g$ est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire.)

   Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

# C Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$ pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit $K$ un sous-ensemble compact de $E$. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r$.

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de $E$ tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de $E$, $I$ étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert $\Omega_i$. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de $K$ n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, ....\Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $E$ contenus dans $K$ et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$.

10. Montrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, ...., F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \varnothing$.

# D Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit $G$ un sous-groupe compact de $GL(E)$ et $K$ un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de $E$. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup\limits_{u \in G} \|u(x)\|$.

11. Montrer que $N_G$ est bien définie, et que c'est une norme sur $E$.

12. Montrer en outre que $N_G$ vérifie les deux propriétés suivantes :

    - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$ ;

    - pour tous $x, y$ dans $E$ avec $x$ non nul, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

    Pour la deuxième propriété on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $||u(z)||$ est continue.

On considère un élément $u$ de $L(E)$ et on suppose que $K$ est stable par $u$, c'est-à-dire que $u(K)$ est inclus dans $K$. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de $K$ le nombre réel $\delta(K) = \sup\limits_{x,y \in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car $K$ est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $K$ et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément $a$ de $K$. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément $a$ de $K$ est un point fixe de $u$.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe $K$ est stable par tous les éléments de $G$. Soit $r$ un entier $\geqslant 1$, $u_1, u_2, ...., u_r$ des éléments de $G$ et $u = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r} u_i$.

14. Montrer que $K$ est stable par $u$ et en déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15. Montrer que $N_G\Big(\dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r} u_i(a)\Big) = \dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r} N_G\big(u_i(a)\big)$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a $N_G\Big(u_j(a) + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)\Big) = N_G\big(u_j(a)\big) + N_G\Big(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)\Big)$.

16. En déduire, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17. Déduire de la question précédente que $a$ est un point fixe de tous les endomorphismes $u_i$ où $i \in \{1, \dots, r\}$.

18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.