Équations différentielles

Exercices Banque CCINP

1 CCINP 31

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Solution de 1 : CCINP 31

1. En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$.
   Donc, $x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

   C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

   Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$.
   Par la méthode de variation des constantes,

   on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$ avec λ, μ fonctions dérivables vérifiant : $\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \cos^3 x \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x\cos^3 x \\ \mu'(x) = \cos^4 x \end{cases}$.
   $\lambda(x) = \frac{1}{4}\cos^4 x$ convient.

   D'après la question 1., $\mu(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$ convient.
   On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \frac{1}{4}\cos^5 x + \left(\frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x\right)\sin x$ est une solution particulière de (E).
   Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + y_p(x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2 CCINP 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Solution de 2 : CCINP 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^{n-1}$$

   Donc $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}\right)x^n$.

   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.
   C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1)a_n$.
   Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
   $x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
   Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.
   Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x \in]0;1[$, $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
   Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \longmapsto x(x-1)$, $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 1$ sont continues sur $]0;1[$ et que la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0;1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ est un plan vectoriel.
   D'où l'absurdité.

3 CCINP 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Solution de 3 : CCINP 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \frac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \frac{3}{2}\ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\frac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Si on cherche à prolonger les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$, alors le prolongement par continuité ne pose pas de problème en posant $f(0) = 0$.

Par contre, aucun prolongement ne sera dérivable en 0 car $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$ est l'ensemble vide.

4 CCINP 74

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Solution de 4 : CCINP 74

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

   (b) $P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} -1+X & 0 & -2 \\ 0 & -1+X & 0 \\ -2 & 0 & -1+X \end{vmatrix}$.
   En développant par rapport à la première ligne, on obtient, après factorisation : $P_A(X) = (X-1)(X+1)(X-3)$.
   On obtient aisément, $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   On pose $e'_1 = (0,1,0)$, $e'_2 = (1,0,-1)$ et $e'_3 = (1,0,1)$.
   Alors, $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A.

2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$.

   Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.
   Alors, $(S) \iff X' = AX$.
   On note P la matrice de passage de la base canonique e de $\mathbb{R}^3$ à la base e'.
   D'après 1., $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Et, si on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.
   Donc $(S) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$.
   On pose alors $X_1 = P^{-1}X$ et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$.
   Ainsi, par linéarité de la dérivation, $(S) \iff X'_1 = DX_1 \iff \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ y'_1 = -y_1 \\ z'_1 = 3z_1 \end{cases}$
   On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.
   On trouve $\begin{cases} x_1(t) = a\mathrm{e}^t \\ y_1(t) = b\mathrm{e}^{-t} \\ z_1(t) = c\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$.
   On obtient : $\begin{cases} x(t) = b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) = a\mathrm{e}^t \\ z(t) = -b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

5 CCINP 75 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Solution de 5 : CCINP 75

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp}A = \{1\}$.
   Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_2, donc égale à I_2.
   Ce n'est visiblement pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.

2. $\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable. $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   Pour $v_1 = (2,-1)$ et $v_2 = (-1,0)$ (choisi de sorte que $f(v_2) = v_2 + v_1$) on obtient une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore , grâce à la linéarité de la dérivation, à l'équation $Y' = TY$.
   Cela nous amène à résoudre le système $\begin{cases} a' = a + b \\ b' = b \end{cases}$ de solution générale $\begin{cases} a(t) = \lambda\mathrm{e}^t + \mu t\mathrm{e}^t \\ b(t) = \mu\mathrm{e}^t \end{cases}$
   Enfin, par la relation $X = PY$ on obtient la solution générale du système initial : $\begin{cases} x(t) = \big((2\lambda - \mu) + 2\mu t\big)\mathrm{e}^t \\ y(t) = \big(-\lambda - \mu t\big)\mathrm{e}^t \end{cases}$

Autres exercices vus en cours

6 Résoudre $y^{(4)} = y$ en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.

7 Soit $\Phi : J \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \qquad (H)$$

où $A : J \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle J. Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$).

8 Soit T un réel > 0, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continues et T-périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$

Indication : on remarquera que Φ est T-périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi : t \mapsto \Phi(t+T)$.

9 On souhaite déterminer un un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) &= tx(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + ty(t) \end{cases}$$

1. Chercher un système dont sont solutions les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$. et conclure.
2. Retrouver le résultat en posant $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.

10 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} (t^2+1)x' &= tx - y + 2t \\ (t^2+1)y' &= x + ty - 1 \end{cases}$

11 **Dans des problèmes d'écrit...**

1. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation
$$y'' + a(x)y = 0$$
est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.
2. Soit a, b deux fonctions T-périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation
$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$
est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$.

Solution de 11 : Dans des problèmes d'écrit...

1. Une implication est évidente. Pour l'autre, f est paire si et seulement $f = -\widehat{f}$ où $\widehat{f} : x \mapsto f(-x)$. Or f est solution si et seulement si $-\widehat{f}$ l'est. Il suffit alors d'utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $y_0' = f'(0)$
2. Utiliser le théorème d'unicité, appliqué à f et $x \longmapsto f(x+T)$ où ϕ est une solution.

12 Déterminer, en utilisant le wronskien, un système fondamental de solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega > 0$.

Solution de 12 :
$x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont solutions, leur wronskien vaut $\omega \neq 0$.

13 Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0) = g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général.

Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0.

Solution de 13 :
Leur wronskien serait nul en x_0.

14 **EDL$_2$ newtoniennes** Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite **newtonienne**)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

Solution de 14 : EDL$_2$ newtoniennes
$w' = 0$, difficile de faire plus simple, et on retrouve le résultat de l'exercice 12.

15 **Oral Mines** Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution de 15 : Oral Mines
Soit $z : t \longmapsto y(t+1)$. Alors z est solution, et $w(y,z)$ est nul en 0. Donc (y,z) est liée. Si $y = \widetilde{0}$ il n'y a rien à faire. Sinon, il existe α tel que $z = \alpha y$. On conclut alors par récurrence sur k pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{N}$, puis par récurrence sur $-k$ pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{Z}^-$.

16 **Fonctions de Bessel** Très classiques en physique. On considère l'équation

$$t^2x'' + tx' + \left(t^2 - \alpha^2\right)x = 0$$

où $\alpha > 0$. On résout sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer qu'il y a une unique solution de la forme $J_\alpha : t \mapsto t^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ où $a_0 = 1$. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?
2. Lorsque $\alpha = \dfrac{1}{2}$, exprimer toutes les solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Solution de 16 : Fonctions de Bessel
Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R supposé non nul. On définit sur $]0, R[$

$$J_\alpha(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence, on a, pour tout $t \in]0,R[$,

$$J'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + t^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$J''_\alpha(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + 2\alpha t^{\alpha-1}\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + t^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

Et donc J_α vérifie l'équation de Bessel si et seulement si (en simplifiant directement par t^α), pour tout $t \in]0,R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [\alpha(\alpha-1)+2n\alpha+n(n-1)+\alpha+n-\alpha^2]a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2} = 0$$

ce qui équivaut à, pour tout $t \in]0,R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(2\alpha+n)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n = 0$$

On peut (bien que l'égalité ne soit vérifiée que sur $]0,R[$) utiliser l'unicité du développement en série entière (si $\sum b_n t^n$ a un rayon de convergence R non nul, si sa somme f, qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, est nulle sur $]0,R[$, toutes ses dérivées sont nulles sur $]0,R[$ et donc, par continuité, en 0, or $n!\,b_n = f^{(n)}(0)$, tous les b_n sont donc nuls). On obtient donc que J_α vérifie l'équation de Bessel sur $]0,R[$ si et seulement si $a_1 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$a_n = \frac{-1}{n(2\alpha+n)}a_{n-2}$$

(on rappelle que $\alpha \geqslant 0$). Si on rajoute la condition $a_0 = 1$, cela donne une solution unique, mais il reste à vérifier que la suite (a_n) obtenue donne une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence non nul.

On constate que cette série entière est de la forme

$$\sum_{p\geqslant 0} a_{2p} t^{2p}$$

avec, pour tout p, $a_{2p} \neq 0$ (récurrence) ; si $x \neq 0$, $u_p = \left|a_{2p}t^{2p}\right|$ est toujours > 0, ce qui permet de calculer

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{t^2}{(2p+2)(2p+2+2\alpha)}$$

qui converge vers 0, ce qui montre, par la règle de d'Alembert, que la série $\sum u_p$ converge toujours ; le rayon de convergence est donc $+\infty$, on a bien trouvé une solution sur $\mathbb{R}_*^+$.

Dans le cas $\alpha = 1/2$...

La relation de récurrence devient

$$\forall p \geqslant 1 \qquad a_{2p} = \frac{-1}{2p(2p+1)}a_{2p-2}$$

Et donc, avec $a_0 = 1$, $a_2 = \dfrac{-1}{2\times 3}$, $a_4 = \dfrac{1}{2\times 3\times 4\times 5}$ et, par récurrence,

$$\forall p \geqslant 0 \qquad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

On obtient

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}t^{2p} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$

Sur un intervalle I ne contenant pas de multiple de π, cherchons une autre solution de l'équation de départ sous la forme

$$\phi(t) = \lambda(t)J_{1/2}(t) = \lambda(t)t^{-1/2}\sin t$$

(λ est une fonction inconnue, au moins deux fois dérivable). On calcule

$$\phi'(t) = \lambda'(t)J_{1/2}(t) + \lambda(t)J'_{1/2}(t)$$

$$\phi''(t) = \lambda''(t)J_{1/2}(t) + 2\lambda'(t)J'_{1/2}(t) + \lambda(t)J''_{1/2}(t)$$

ϕ vérifie l'équation de Bessel pour $\alpha = 1/2$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$t^2\left(\lambda''(t)J_{1/2}(t) + 2\lambda'(t)J'_{1/2}(t)\right) + t\lambda'(t)J_{1/2}(t) = 0$$

ou encore si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\sqrt{t}\sin t\lambda''(t) + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + 2t\left(\sin t \times \frac{-1}{2}t^{-3/2} + \cos t \times t^{-1/2}\right)\right)\lambda'(t) = 0$$

ce qui, une fois simplifié, donne

$$\sin t\ \lambda''(t) + 2\cos t\ \lambda'(t) = 0$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 en λ', on multiplie par l'exponentielle d'une primitive de $2\sin t\ /\cos t$, après avoir préalablement divisé par $\sin t$. Ce qui revient finalement à multiplier par $\sin t$, pour obtenir

$$\forall t \in I \qquad \sin^2 t\ \lambda'(t) = C$$

Reste à primitiver $1/\sin^2 t$; sans revenir aux règles de Bioche, on se souvient de la dérivée de la tangente : $1/\cos^2 t$. On décide donc de dériver la cotangente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right) = \frac{-1}{\sin^2 t}$$

On aboutit au fait que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$ est une autre solution de l'équation. Elle est assez clairement indépendante de la précédente ; les solutions de l'équation de Bessel dans ce cas $\alpha = 1/2$ sont donc les

$$t \mapsto \frac{\alpha\cos t\ +\ \beta\sin t}{\sqrt{t}}$$

17 Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ (H) $\quad x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$

Solution de 17 :

Équation d'Euler, la recherche de solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ conduit aux solutions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto x^5$, le wronskien permet de voir qu'il s'agit bien d'un système fondamental de solutions.

18 Résoudre sur $]1,+\infty[$ (H) $\quad \left(1-x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = 0.$

Solution de 18 :

On cherche des solutions polynomiales, le terme de plus haut degré nous dit que celui-ci est 1 ou 2.

On cherche alors les solution $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On trouve toutes les solutions : $x \mapsto a(x^2+1) + bx$ qui forment bien un plan vectoriel.

19 Trouver les solutions DSE de l'équation (H) $2xy'' + y' - y = 0$.

Terminer la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $t = \sqrt{2x}$.

Solution de 19 :

On cherche les solutions DSE, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)(n+1)a_{n+1} = a_n$. Soit $a_0 = 0$ et il s'agit de la fonction nulle.

Soit $a_0 \neq 0$ et d'Alembert nous donne un rayon de convergence $+\infty$.

On exprime ensuite la solution $f(x) = a_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ si $x \geqslant 0$ et $a_0 \cos\left(\sqrt{-2x}\right)$ si $x \leqslant 0$.

Cela donne une droite de solution engendrée par $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il faut trouver une solution indépendante. La variation de la constante donne des calculs pénibles. On peut deviner un $\operatorname{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$...

Effectuons le changement de variable : on pose $z(t) = z\left(\sqrt{2x}\right) = y(x) = y\left(t^2/2\right)$, et on a bien z deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si y l'est.

Puis, pour tout $t > 0$, $z'(t) = t y'\left(t^2/2\right)$, $z''(t) = t^2 y'\left(t^2/2\right) + y'\left(t^2/2\right)$ donc notre équation est équivalente à $z'' = z$ d'où z, d'où nos solutions $x \mapsto \lambda \operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right) + \mu \operatorname{sh}\left(\sqrt{2x}\right)$.

20 Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de 20 :

On peut déterminer $\exp A$ soit en diagonalisant, soit en cherchant le polynôme annulateur pour trouver les puissances de A.

En effet, On vérifie que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\exp A = P(\exp D)P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-2} + 4e^3 & -4e^{-2} + 4e^3 \\ -e^{-2} + e^3 & 4e^{-2} + e^3 \end{pmatrix}$ après calculs.

Deuxième méthode $P = (X+2)(X+3)$ est à la fois le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A, et en est un polynôme annulateur. Division euclidienne : $X^k = P \times Q_k + R_k$ où $R_k = a_k X + b_k$ se trouve en évaluant en -2 et 3, avec $A^k = R_k(A) = a_k A + b_k I_2$.

En remplaçant dans la définition de $\exp A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, on retrouve l'expression.

On remarque que $B = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 2.

Comme elles commutent, $\exp B = \exp I_2 \exp N = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}(I_2 + N) = \begin{pmatrix} e & -e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

21 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Solution de 21 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm i$, de vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm i \end{pmatrix}$.

On trouve un système fondamental de solutions $\begin{pmatrix} \cos \\ \cos + \sin \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin \\ -\cos + \sin \end{pmatrix}$.

Révisions de MPSI

22 **EDL₁** Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur $\mathbb{R}$

1. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$
2. $y' + y = te^t + \sin t$
3. $y' - \ln(x) y = x^x$
4. $t^2 y' + 2ty = \dfrac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
6. $y' + 2xy = e^{x - x^2}$
7. $ty' - y = \sqrt{|t|}$
8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
9. $(1+t)^2 y'' + (1+t)y' = 2$
10. $(x^2+1)y' + xy = 1$
11. $(t^2+1)^2 y' + 2t(t^2+1)y = 1$
12. $\operatorname{ch}(x) y' - \operatorname{sh}(x) y = \operatorname{sh}^3(x)$

Solution de 22 : EDL₁

1. Sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto x + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto \dfrac{2t-1}{4}e^t + \dfrac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}$
3. Sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x}$
4. Sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t + \lambda_k}{t^2}$
   Pas de solution sur $\mathbb{R}$.
5. Sur $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k)\cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$.
   Solutions sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto (\sin t + \lambda)\cos t$.
6. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto (\lambda + e^x)e^{-x^2}$
7. Sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \lambda_k t - 2\sqrt{|t|}$
   Pas de solution sur $\mathbb{R}$.
8. Sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto (x^2 + \lambda)e^{-x^2}$
9. Sur $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$, $t \mapsto \ln^2(1+t) + \lambda_k + \mu_k \ln(1+t)$.
   Aucune solution sur $\mathbb{R}$.
10. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \lambda}{\sqrt{1+x^2}}$.
11. Sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t + \lambda}{t^2+1}$.
12. Sur $\mathbb{R}$, $1 + \operatorname{ch}^2 + \lambda \operatorname{ch}$.

23 **EDL₂** Donner les solutions réelles ou complexes de

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8\sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$
2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
3. $y'' + y = \sin^2(t)$
4. $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch}(2x)\cos x$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$

Solution de 23 : EDL₂

1. $t \mapsto -\dfrac{4}{5}\cos t - \dfrac{12}{5}\sin t - e^{t-\pi} + \dfrac{1}{5}e^{2(\pi - t)}$.

2. $x \mapsto \dfrac{x^2+Ax+B}{4}e^x + \dfrac{e^{-x}}{8}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

3. $t \mapsto A\sin t + B\cos t + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2t}{6}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

   Ou, dans $\mathbb{C}$, $t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2t$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.

4. $x \mapsto \left(A\cos x + \dfrac{x+B}{4}\sin x\right)e^{-2x} + \dfrac{2\cos x + \sin x}{80}e^{2x}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

5. $t \mapsto (A\cos t + B\sin t)e^{-t} + t - 1 + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{1}{5}\sin t$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

24 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 2f(-x) + x$.

(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

Solution de 24 :

$x \mapsto A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \dfrac{2x-1}{4} = \lambda\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{2x-1}{4}$.

25 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Solution de 25 :

$x \mapsto A\,\mathrm{sh}\,x + B\cos x - x + \dfrac{\cos x + x\sin x}{2}$.

Sujets d'écrits

26 **CCP 2016** On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad x^2y'' + (x^2-x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

Solution de 26 : CCP 2016

Supposons que l'équation différentielle (E) possède une solution développable en série entière sur $]-r; r[$ (avec $r > 0$), notée $y : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En dérivant deux fois cette série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $x \in]-r; r[$:

$$(x^2-x)y'(x) = (x^2-x)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n,$$

ainsi que

$$x^2y''(x) = x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n.$$

En sommant ces développements en série entière, il vient, pour tout $x \in]-r; r[$:

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + (x^2-x)y'(x) + 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_nx^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n^2-2n+2)a_n + (n-1)a_{n-1}\right)x^n + 2a_0. \end{aligned}$$

Puisque y est solution de (E), on obtient par unicité du développement en série entière les relations $\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1, \; (n^2-2n+2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0 \end{cases}$.

Puisque $n^2 - 2n + 2 = 1 + (n-1)^2 \neq 0$, ces relations se réécrivent $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1, \; a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2}a_{n-1} \end{cases}$, ce qui entraîne la nullité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une récurrence immédiate.

En conclusion, on a montré qu'une telle solution est nécessairement la fonction nulle.

Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

27 **CCP 2014** a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, \mathrm{i}[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J.

   Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leqslant 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où $(E) : \quad x^2y'' + xy' = 0$.

   Determiner S^+ et S^-.

   Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S.
4. Dans cette question $(E) : \quad x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

   Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).

   En déduire S^+ puis S^-.

   Determiner S et donner la dimension de S.
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

   On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Solution de 27 : CCP 2014

1. Sur **l'intervalle** $]0, +\infty[$ l'équation (E) se réécrit sous forme résolue $y'' + \dfrac{a(x)}{x^2}y' + \dfrac{b(x)}{x^2}y = 0$.

   Les fonctions $x \mapsto \dfrac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur I et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2.

   Donc par théorème, S^+ est de dimension 2 et de même, S^- est de dimension 2.
2. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur $\mathbb{R}^*$.

   Par continuité de f en 0, $f(0) = 0$.

   Donc $f = 0$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

   φ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}(\varphi)$.

   Or $\mathfrak{Im}(\varphi)$ est un sev de $S_1 \times S_2$ qui est un ev de dimension $2 + 2 = 4$.

   Donc $\mathfrak{Im}(\varphi)$ est un ev de dimension finie et $\dim(\mathfrak{Im}(\varphi)) \leqslant 4$.

   Etant isomorphe à $\mathfrak{Im}(\varphi)$, S est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leqslant 4$.
3. - Soit $I_0 \in \{I, J\}$ (l'un des deux intervalles...)

     Sur I_0, l'équation est équivalente à $y'' + \dfrac{1}{x}y' = 0$ soit au système $\begin{cases} z' + (1/x) \times z = 0 \\ y' = z \end{cases}$

- La première équation, linéaire, homogène, d'ordre 1 a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle I_0 la droite vectorielle $\{x \mapsto \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}$.
- Ainsi, y est solution de (E) ssi $\exists K \in \mathbb{R}, y' = \frac{K}{x}$ ssi $\exists (K,L) \in \mathbb{R}^2, y = K\ln(|x|) + L$.
- Conclusion : sur l'intervalle I ou l'intervalle J, l'ensemble solution est $\mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \ln(|x|))$
- Soit $f \in S$. Alors il existe $(k_1,k_2,k_3,k_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = k_1\ln(x) + k_2 \\ \forall x < 0, f(x) = k_3\ln(|x|) + k_4 \end{cases}$
  f étant continue en 0 donc bornée au voisinage de 0, on obtient $k_1 = k_3 = 0$.
  La continuité à gauche et à droite en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$.
  Donc f est une fonction constante.
- Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sont éléments de f.
  Conclusion : $S = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1)$ et $\dim(S) = 1$.

4.
- Notons f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
  Alors f_α est solution de (E) ssi $\forall x > 0, x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6x\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ ssi $\forall x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$
  4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de S^+.
- La famille $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$ est une famille libre à 2 éléments (vérification immédiate et laissée au soin du lecteur) d'éléments de S^+ et S^+ est de dimension 2.
  Donc c'est une base de S^+ et $S^+ = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.
- On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur J solutions de (E). Elles forment également une famille libre à 2 éléments et $\dim(S^-) = 2$.
  Donc $S^- = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.
- On vérifie que $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} k_1x^3 + k_2x_4 \text{ si } x \geqslant 0 \\ k_3x^3 + k_4x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases}, (k_1,..,k_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.
  Soit $f \in S$. D'après ce qui précède, pour vérifier que S appartient à l'ensemble proposé, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$...
  On sait qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = k_1x^3 + k_2x^4$. La continuité de f en 0 donc à droite en 0 donne immédiatement $f(0) = \lim_0 k_1x^3 + k_2x^4 = 0$.
  Soit f dans l'ensemble proposé.
  Alors il existe $k_1, .., k_4 \in \mathbb{R}$ vérifiant ce qu'il faut...
  On vérifie que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$:
  Soit $\alpha > 0$. Au voisinage de α, f coïncide avec la fonction $x \mapsto k_1x^3 + k_2x^4$. Donc f est deux fois dérivable en α, $f'(\alpha) = 3k_1x^2 + 4k_2x^3$ et $f''(\alpha) = 6k_1x + 12k_2x^2$.
  De même, pour $\alpha < 0$, f coïncide au voisinage de α avec $x \mapsto k_3x^3 + k_4x^4$ donc f est deux fois dérivable en α et $f'(\alpha) = 3k_3x^2 + 4k_4x^3, f''(\alpha) = 6k_3x + 12k_4x^2$.
  Ainsi, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée seconde f'' est clairement continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.
  Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$.
  De plus, f est clairement continue à droite et à gauche en 0 donc continue en 0 ainsi qu'en tout point de $\mathbb{R}^*$.
  Donc f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$.
  Il ne reste qu'à vérifier que $f'(x)$ et $f''(x)$ admettent une même limite finie en 0 à droite et à gauche pour assurer, d'après le théorème de prolongement de la classe, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
  D'après les expressions précédemment évoquées pour f'' et f', ces limites existent et valent 0.
  Conclusion : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
  Les expressions déterminées plus haut pour f' et f'' assurent immédiatement que f est solution de (E).
- Conclusion : on a bien l'égalité souhaitée et S est clairement de dimension 4.

5.
- Considérons l'équation $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y$.
  Alors $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont deux solutions de (E) (vérification immédiate) sur I et sur J.
  Cette famille de fonctions est clairement libre. Donc comme précédemment, S^+ et $S-$ sont engendrés par ces deux fonctions.
- Soit $f \in S$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
  Alors il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2}$ et $\forall x < 0, f(x) = \frac{k_3}{x} + \frac{k_4}{x^2}$.
  Alors $\forall x > 0, x^2f(x) - k_1x = k_2$ donc la continuité de f en 0 à droite donne par passage à la limite en 0^+ : $0 = k_2$.
  Donc $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x}$ d'où $\forall x > 0, x \times f(x) = k_1$ ce qui, par passage à la limite en 0 donne $0 = k_1$.
  De même, la continuité de f à gauche en 0 donne $k_3 = k_4 = 0$.
  Donc $f = 0$ ce qui démontre que S est l'espace vectoriel nul.

28 **CCP 2013** On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases}.$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
   En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice e^{tA}.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$.

Solution de 28 : CCP 2013

1. $\chi_A(X) = (1-X)(3-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.
   D'après le théorème de Caley Hamilton (ou par vérification immédiate), $(A - 2I_2)^2 = 0$ donc $A - 2I_2$ est nilpotente.
   Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $$e^{tA} = e^{2t}e^{tB} = e^{2t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tB)^n = e^{2t}\left(I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B^n\right) = e^{2t}\,(I_2 + tB).$$
   En effet, $B^2 = 0$ donc $\forall n \geqslant 2, B^n = 0$.
2. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système et les conditions initiales se réécrit matriciellement sous la forme équivalence suivante : $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = {}^t(1,2) \end{cases}$.
   Par théorème de cours, ce problème de Cauchy linéaire à coefficients constants admet une unique solution : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, X_0(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Simplifions cette dernière expression. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $$e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(I_2 + tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}.$$
   Conclusion : l'unique couple solution est le couple $(t \mapsto e^{2t}(1-3t); t \mapsto e^{2t}(2+3t))$.

29 **Mines 2011**

1. On pose $\mathrm{j} = \exp(2\mathrm{i}\pi/3)$.Que vaut $\mathrm{j}^4 + \mathrm{j}^2 + 1$?

   On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{C}$ et on considère la matrice A de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle $X' = AX$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $y^{(4)} + y'' + y = 0$ et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   On pourra considérer le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

Solution de 29 : Mines 2011

1. $1 + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}^4 = 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
2. On a $\chi_A = X^4 + X^2 + 1$, d'après 1., j et $-$j sont des racines et comme χ_A est à coefficients réels, $\bar{\mathrm{j}}$ et $-\bar{\mathrm{j}}$ sont aussi des racines , Ainsi $\chi_A = (X - \mathrm{j})(X + \mathrm{j})\left(X - \bar{\mathrm{j}}\right)\left(X + \bar{\mathrm{j}}\right)$.

   χ_A étant scindé à racines simples , donc A est diagonalisable.

   $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{j}I_4)$ si et seulement si $\begin{cases} y & = \mathrm{j}x \\ z & = \mathrm{j}y \\ t & = \mathrm{j}z \\ -x - z & = \mathrm{j}t \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{j}I_4) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \bar{\mathrm{j}} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   A étant une matrice réelle, $\mathrm{Ker}\left(A - \bar{\mathrm{j}}I_4\right) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mathrm{j}} \\ \mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

   De même, $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{j}I_4) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \\ \bar{\mathrm{j}} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{j}I_4) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{\mathrm{j}} \\ \mathrm{j} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

   Ainsi $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{j} & \bar{\mathrm{j}} & -\mathrm{j} & -\bar{\mathrm{j}} \\ \bar{\mathrm{j}} & \mathrm{j} & \bar{\mathrm{j}} & \mathrm{j} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \mathrm{j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathrm{j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathrm{j}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\mathrm{j}} \end{pmatrix}$ conviennent.
3. Les solutions du système $X' = AX$ sont de la forme :

$$X : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \bar{\mathrm{j}} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{\bar{\mathrm{j}}t}\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mathrm{j}} \\ \mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{-\mathrm{j}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \\ \bar{\mathrm{j}} \\ -1 \end{pmatrix} + \delta e^{-\bar{\mathrm{j}}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{\mathrm{j}} \\ \mathrm{j} \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Si y est solution de $y^{(4)} + y'' + y = 0$, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$ est solution du système $Y' = AY$, donc de la forme précédente , en particulier il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{C},\ y(t) = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + \beta \mathrm{e}^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} + \delta \mathrm{e}^{-\bar{\mathrm{j}}t}$$

   Réciproquement : toute fonction de le forme ci-dessus est solution.

   Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. On a $\left(\varphi_{\mathrm{j}}, \varphi_{-\mathrm{j}}, \varphi_{\bar{\mathrm{j}}}, \varphi_{-\bar{\mathrm{j}}}\right)$ est libre, donc une solution est à valeurs réelles $\Longleftrightarrow y = \overline{y} \Longleftrightarrow \beta = \overline{\alpha}$ et $\delta = \overline{\gamma}$.

Donc les solutions à valeurs réelles sont de la forme $y(t) = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + \overline{\alpha}\mathrm{e}^{\bar{\mathrm{j}}t} + \gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} + \overline{\gamma}\mathrm{e}^{-\bar{\mathrm{j}}t}$.
Ce qui peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + D\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Où A, B, C et D sont des réels .

30 **CCP 2009** On considère l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$. (E)

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-1, 0[$ et $]0, 1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1, 1[$.

Solution de 30 : CCP 2009

1. $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2]0, 1[$.

   f est solution si et seulement pour tout $x \in I_k$, $(\mathrm{id} \times f)(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$ qui se primitive en $\mathrm{Arcsin}\left(x^2\right) + C_k$.

   Les solutions sur I_k sont les $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}\left(x^2\right) + C_k}{x}$.
2. Raccord de solution, si on a une solution sur $]-1, 1[$, elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que si $x \in I_k$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arcsin}\left(x^2\right) + C_k}{x}$. Par continuité, les limites en 0 doivent être finies, donc $C_1 = C_2 = 0$.

   Réciproquement, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arcsin}\left(x^2\right)}{x}$ est bien dérivable sur $]-1, 1[$ et solution sur cet intervalle de (E), c'est la seule.

31 **Centrale 2008** λ désigne un réel fixé, q une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, 2π-périodique paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. et on considère l'équation différentielle d'inconnue y : (E_λ) $\quad y'' + (\lambda - q)y = 0$.

1. Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver q'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.
2. Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité.
3. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de $Q : y \in E_2 \to -y'' + qy$ où E_2 est l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution de 31 : Centrale 2008

1. L'équation étant linéaire (et ses cœfficients des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce :

   Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = u$ et $y'(0) = v$.

   Soit maintenant y une solution vérifiant $y(0) = 0$. Posons $z(x) = y(-x)$. Alors $z''(x) = y''(-x)$ et, par parité de q :

$$z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) = y''(-x) + (\lambda - q(-x))y(-x) = 0.$$

   Donc z est solution de (E_λ) et, puisque $z(0) = 0 = y(0)$, $z'(0) = -y'(0)$, l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz atteste de l'égalité $z = -y$, c'est-à-dire que y est impaire. La réciproque est facile.
2. Soient y et z deux solutions. Leur wronskien vaut $w = yz' - y'z$. Si y et z sont toutes deux paires, on a $y'(0) = z'(0) = 0$. Si elles sont toutes deux impaires, $y(0) = z(0) = 0$. Dans les deux cas, $w(0) = 0$, ce qui prouve que (y, z) n'est pas une base de solutions.

3. Soit alors λ une valeur propre de Q. L'espace propre correspondant est égal à $E_2 \cap S_{E_\lambda}$ (où S_{E_λ} est l'espace des solutions de E_λ). Il est non réduit à $\{0\}$ par définition. On sait de plus que $\dim S_{E_\lambda} = 2$ et on vient de voir que S_{E_λ} ne peut être contenu dans E_2. Donc $\dim(E_2 \cap S_{E_\lambda}) = 1$.

32 **CCP 2005** Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Solution de 32 : CCP 2005

1. On obtient sans mal que sur I l'espace des solutions est $\mathrm{Vect}(x \in I \mapsto x^n)$ et sur J, $\mathrm{Vect}(x \in J \mapsto x^n)$.
2. Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme dérivable en 0, sa courbe est donc une droite.
   En conclusion : l'espace des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.
3. Supposons $n > 1$, soit f une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$
   En évaluant l'équation en 0, on tire $f(0) = 0$.
   La continuité en 0 n'impose aucune condition sur α et β, la dérivabilité non plus car $\dfrac{\alpha x^n - 0}{x} = \alpha x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ et $\dfrac{\beta x^n - 0}{x} = \beta x^{n-1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ car $n > 1$.
   Réciproquement : toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \leqslant 0 \\ \beta x^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $h_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Autres exercices

33 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$ en posant $u = y - x$.

Solution de 33 :
Poser $u = x - y$. On trouve alors $u(t) = \lambda e^{2t} + \sin t$. puis $y' = 2y + \lambda e^{2t} + 3\sin t$.
D'où $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t} - \dfrac{3\cos t + 6\sin t}{5}$ et $x(t) = (\lambda t + \mu + \lambda)e^{2t} - \dfrac{3\cos t + \sin t}{5}$.

34 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -y + e^{-t} \\ y' = x + e^{-t} \end{cases}$

Solution de 34 :
Système fondamental de solutions du système homogène : $\begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}$.

Puis solution évidente $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

35 On considère $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre H et en déduire $\exp(tA)$.
2. Retrouver $\exp(tA)$ par un calcul direct.

Solution de 35 :

Pour 1 : trigonaliser.
Pour 2 : Écrire $A = I_3 + N$ avec N nilpotente.

36 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

1. Résoudre le système homogène en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
2. Résoudre le système.
3. Retrouver les solutions en posant $z = x + iy$.

Solution de 36 :
Pour 2 : variation des constantes. $\begin{cases} x(t) = (a\cos t - b\sin t)e^{t^2} - \dfrac{\cos t}{2} \\ y(t) = (a\sin t + b\cos t)e^{t^2} - \dfrac{\sin t}{2} \end{cases}$

37 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer de deux façons $\exp(\pi A)$.

38 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$. Que dire de $\mathrm{Sp}(e^A)$?

39 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A.

1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire $e^A \in \mathbb{R}[A]$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer e^A et déterminer un polynôme P tel que $e^A = P(A)$.

40 Résoudre l'équation $y'' + y = \tan^2 t$.

Solution de 40 :
Méthode de variation des constantes.

41 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

Solution de 41 :

$a=-2$, puis variation de la constante, on trouve une autre solution $x \mapsto 4x^2+1$: on peut aussi chercher directement une solution polynomiale...

42 Résoudre l'équation $(1+x^2)y''+xy'-4y=-3x$ en commençant par chercher des solutions polynomiales.

Solution de 42 :

Polynôme : $x+c(2x^2+1)$.

Puis variation de la constante $c(x)(2x^2+1)$: $x\sqrt{x^2+1}$.

Au final : $x \mapsto x+c(2x^2+1)+dx\sqrt{x^2+1}$.

43 Résoudre l'équation $4xy''+2y'-y=0$ en déterminant les solutions développable en série entière.

Solution de 43 :

$x \mapsto a_0 \operatorname{ch}\sqrt{x}$ si $x \geqslant 0$ et $a_0 \cos\sqrt{-x}$ sinon.

On « devine » d'autres solutions en $x \mapsto \operatorname{ch}\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \cos\sqrt{-x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Raccord : les seules solutions sur $\mathbb{R}$ sont les solutions DSE trouvées ci-dessus.

44 Résoudre l'équation $x^2y''+4xy'-(x^2-2)y=\mathrm{e}^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x)=x^2y(x)$.

Solution de 44 :

On trouve $z''(x)-z(x)=\mathrm{e}^x$

Puis $y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}+A\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+B\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

45 Résoudre l'équation $xy''-y'-4x^3y=0$ sur $]0,+\infty[$ en effectuant le changement variable $t=x^2$.

46 Sur $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f,g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m\left(\mathrm{e}_{-\lambda} f\right)=(D-\lambda\,\mathrm{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\operatorname{Ker}(D-\lambda\,\mathrm{id}_E)^m$.
4. Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)}+\cdots+a_0 y=0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P.